OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA
Predavanje II

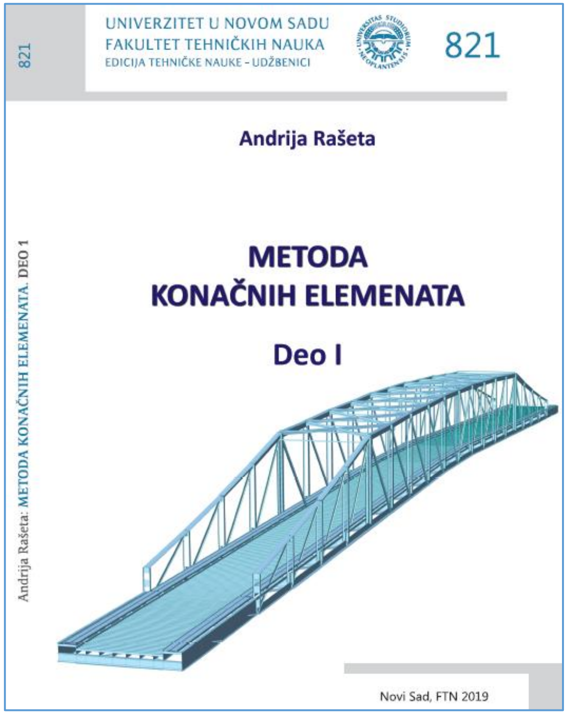
Univerzitet u Novom Sadu, Fakultet tehničkih nauka,
Departman za građevinarstvo i geodeziju
Katedra za konstrukcije
Prof. dr Andrija Rašeta
Kabinet LG209
email: araseta@uns.ac.rs i araseta@gmail.com

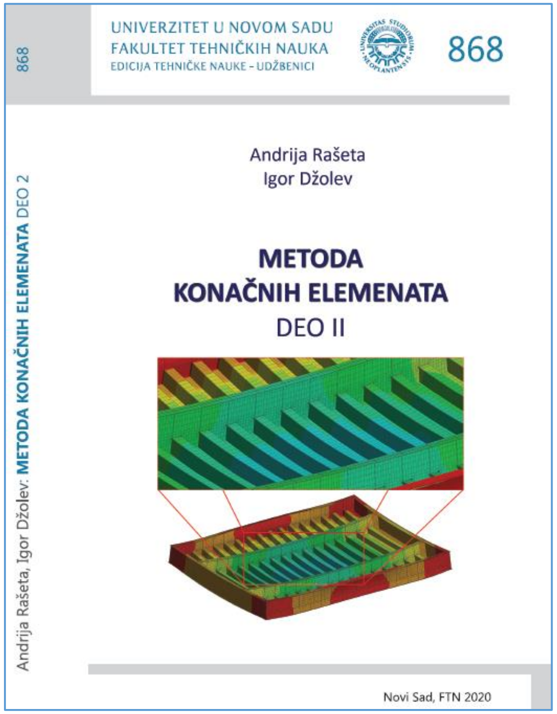
OSNOVI METODE KONAČNIH ELEMENATA Predavanje II

Interpolacione funkcije. Direktan postupak
1D KE
Linearna statička analiza

Literatura

- **Metoda konačnih elemenata, deo I**, A. Rašeta, FTN Novi Sad, 2019.
- **Metoda konačnih elemenata, deo II**, A. Rašeta, I. Džolev, FTN Novi Sad, 2020.





Interpolacione funkcije

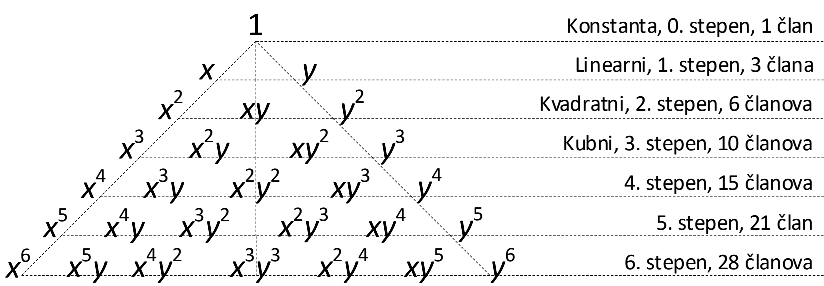
- **Polinomi**

Komentar:
Polinomi se uglavnom koriste kao IF jer su jednostavni, mogu da obezbede dobru aproksimaciju promenljive u polju KE, kao i kontinuitet između elemenata

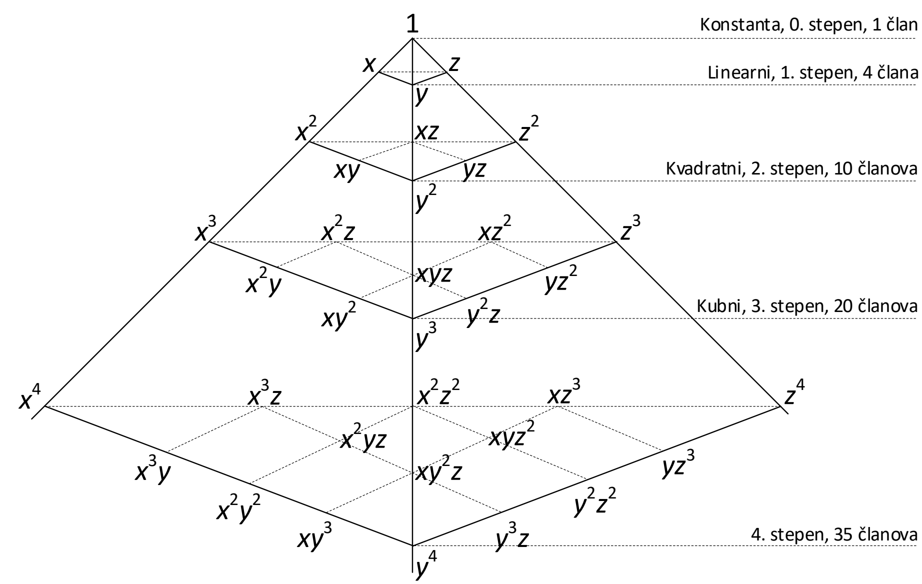
$$P_n(x) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 + \cdots \qquad P_n(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 xy + \alpha_6 y^2 + \cdots$$

$$P_n(x,y,z) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y + \alpha_4 z + \alpha_5 x^2 + \alpha_6 y^2 + \alpha_7 z^2 + \alpha_8 xy + \alpha_9 yz + \alpha_{10} xz + \cdots$$

Paskalov trougao



Paskalov tetraedar



Interpolacione funkcije. Direktan postupak

- Komponente pomeranja proizvoljne tačke u polju KE neprekidne su funkcije koordinata tačaka i mogu da se prikažu na sledeći način

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$$

  - gde su
    - α_i (i = 1, 2, ..., n) – nezavisni nepoznati koeficijenti interpolacionog polinoma (generalisane koordinate) čiji je broj jednak broju stepeni slobode KE
    - $\mathbf{A}$ – matrica promenljivih koje čine polinom i koje odgovaraju problemu koji se rešava (jednodimenzionalni, dvodimenzionalni i trodimenzionalni), a koja se naziva još i matrica polja KE ili matrica polinoma
- Vektor generalisanih pomeranja u čvorovima KE glasi

$$\mathbf{d} = \{d_1 \quad d_2 \quad \cdots \quad d_n\}^T$$

  - gde je n broj stepeni slobode KE

Interpolacione funkcije. Direktan postupak

- Da bi se odredile nepoznate generalisane koordinate α_i, odnosno da bi se izrazile preko osnovnih nepoznatih generalisanih pomeranja d_i u čvorovima KE, koristi se interpolacija $\mathbf{u} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$ koja se primenjuje na koordinate čvorova KE i dobija se

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha}$$

  - gde je $\mathbf{C}$ tzv. matrica oblika
- Nepoznate generalisane koordinate α_i određuju se rešavanjem prethodne jednačine

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{d} \qquad \det(\mathbf{C}) \neq 0$$

- Kombinujući $\mathbf{u} = \mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}$ i $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{C}^{-1}\mathbf{d}$ sledi

$$\mathbf{u} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{d} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

  - gde je **matrica IF**

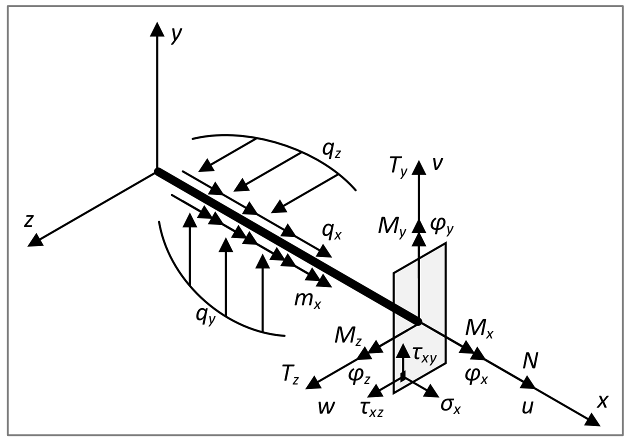
$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1}$$

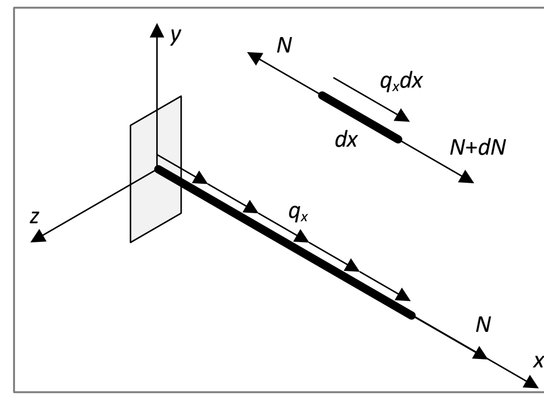
1D KE. Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti

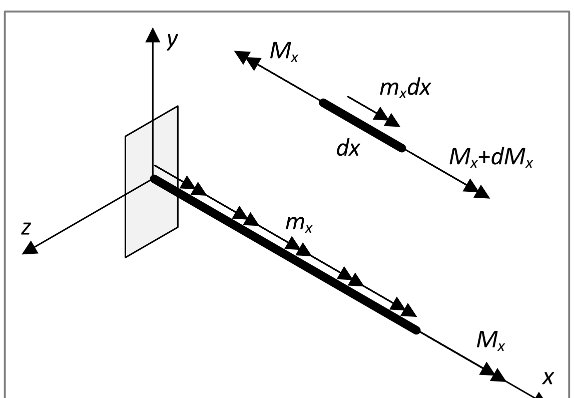
- Linijski ili jednodimenzionalni ili 1D problem
- Pravolinijski prizmatičan štap. Ojler-Bernulijeva teorija savijanja

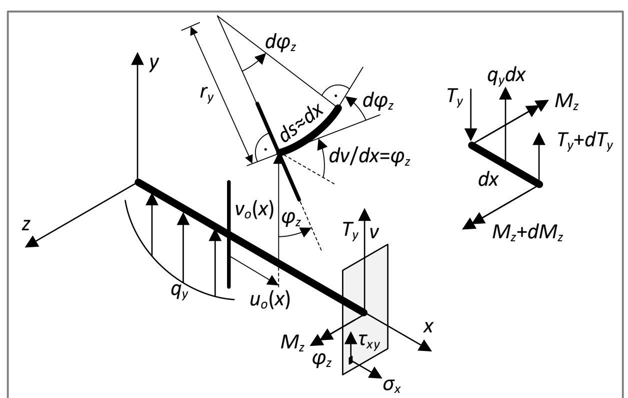
Pretpostavke

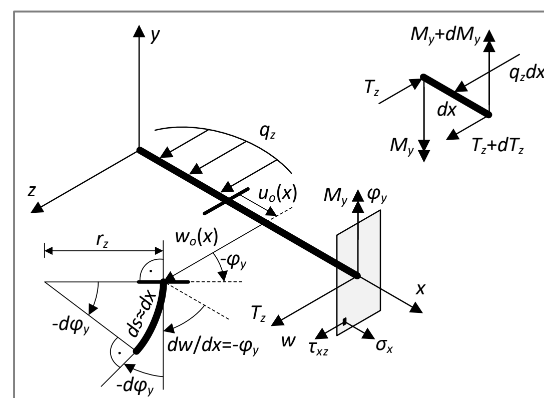
- materijal je homogen, izotropan i linerano elastičan
- pomeranja su mala i
- deformacije su male











1D KE. Rekapitulacija osnovnih jednačina linearne teorije elastičnosti

- **Uslovi ravnoteže**

$$\begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d^2/dx^2 \\ 0 & 0 & d^2/dx^2 & 0 \\ 0 & d/dx & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = -\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ q_z \\ m_x \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{D}_e \boldsymbol{\sigma} = -\mathbf{q}$$

- **Veze između deformacija i pomeranja**

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \theta_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} d/dx & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d/dx \\ 0 & 0 & -d^2/dx^2 & 0 \\ 0 & d^2/dx^2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D}_k \mathbf{u}$$

- **Veze između napona i deformacija**

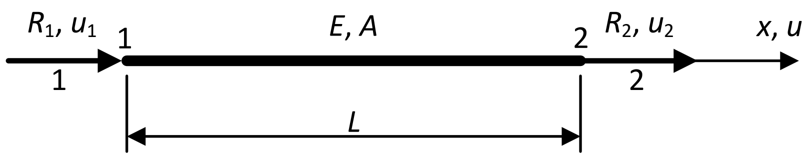
$$\begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} EA & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GI_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & EI_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_z \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \theta_x \\ \kappa_y \\ \kappa_z \end{Bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\,\boldsymbol{\varepsilon}$$

- **Esencijani i prirodni granični uslovi**

$$\begin{Bmatrix} u_b \\ v_b \\ w_b \\ \varphi_{bx} \\ \varphi_{by} \\ \varphi_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -d/dx & 0 \\ 0 & d/dx & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \\ \varphi_x \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{u}_b = \mathbf{R}_u \mathbf{u}$$

$$\begin{Bmatrix} F_{bx} \\ F_{by} \\ F_{bz} \\ M_{bx} \\ M_{by} \\ M_{bz} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -d/dx \\ 0 & 0 & d/dx & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} N \\ M_x \\ M_y \\ M_z \end{Bmatrix} \rightarrow \mathbf{q}_b = \mathbf{R}_q \boldsymbol{\sigma}$$

1D KE. Štapni KE. Aksijalno naprezanje. Interpolacione funkcije. Direktan postupak



- Usvaja linearna raspodela pomeranja u polju KE

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 x \qquad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}$$

- Za čvorove KE sledi (granični uslovi)

$$x = 0 \qquad u = u_1 = \alpha_1$$

$$x = L \qquad u = u_2 = \alpha_1 + \alpha_2 L$$

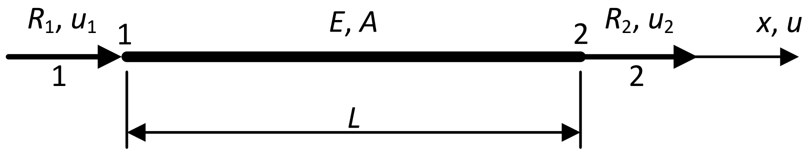
- Vektor generalisanih pomeranja čvorova KE glasi

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & L \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}^{-1} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

- Matrica IF glasi

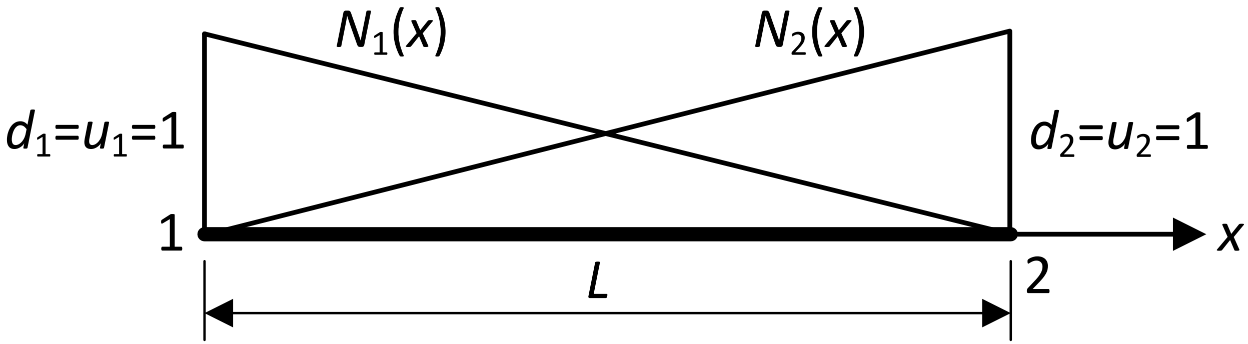
$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \frac{1}{L} \begin{bmatrix} L & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1(x) & N_2(x) \end{bmatrix}$$

1D KE. Štapni KE. Aksijalno naprezanje. Interpolacione funkcije



- IF su

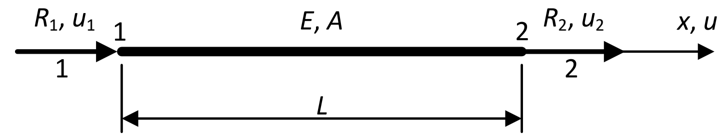
$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_2(x) = \frac{x}{L}$$



- Raspodela pomeranja u polju KE u zavisnosti od generalisanih pomeranja u čvorovima glasi

$$u = \mathbf{Nd} = u_1 N_1(x) + u_2 N_2(x)$$

1D KE. Štapni KE. Aksijalno naprezanje. Interpolacione funkcije



- **IF mogu da se odrede rešavanjem homogene diferencijalne jednačine aksijalnog naprezanja** $EA\dfrac{d^2u}{dx^2} = 0$
- Rešenje se pretpostavlja u obliku $u = \alpha_1 + \alpha_2 x$
- Koristeći granične uslove

$$u(0) = u_1 \qquad u(L) = u_2$$

- sledi

$$u(0) = \alpha_1 = u_1 \qquad u(L) = \alpha_1 + \alpha_2 L = u_1 + \alpha_2 L = u_2 \Rightarrow \alpha_2 = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

- raspodela pomeranja u polju KE glasi

$$u(x) = u_1 + \frac{u_2 - u_1}{L}x = \left(1 - \frac{x}{L}\right)u_1 + \frac{x}{L}u_2$$

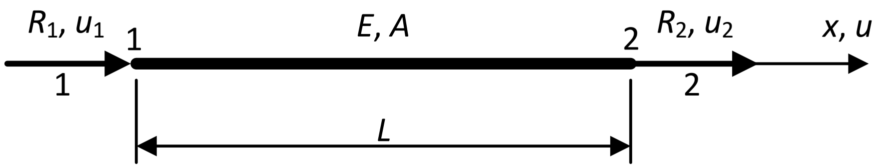
- odnosno IF su

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_2(x) = \frac{x}{L}$$

Komentari:

- IF predstavljaju tačno rešenje homogene diferencijalne jednačine aksijalnog naprezanja KE uz odgovarajuće granične uslove po pomeranjima (jedinična stanja pomeranja krajeva štapa u pravcu ose KE)
- IF N_i za čvor i ima vrednost 1, a u svim ostalim čvorovima KE ima vrednost 0

1D KE. Štapni KE. Aksijalno naprezanje. Matrica krutosti



- Vektori stepeni slobode (pomeranja u pravcu ose štapa) i generalisanih sila (aksijalne sile) u čvorovima KE su

$$\mathbf{d}^T = \{u_1 \quad u_2\} \qquad \mathbf{R}^T = \{R_1 \quad R_2\}$$

- Raspodela pomeranja (u pravcu ose KE) u polju KE u zavisnosti od pomeranja u čvorovima

$$u = N_1 u_1 + N_2 u_2 \qquad \mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d} = [N_1 \quad N_2]\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix}$$

- IF su

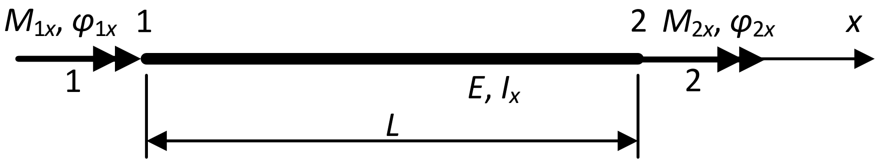
$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_2 = \frac{x}{L} \qquad \mathbf{N} = [N_1 \quad N_2] = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right]$$

- Matrica $\mathbf{B}$ $\quad \mathbf{B} = \mathbf{D}_k\mathbf{N} = \left[\dfrac{d}{dx}\right][N_1 \quad N_2] = \left[\dfrac{dN_1}{dx} \quad \dfrac{dN_2}{dx}\right] = \left[-\dfrac{1}{L} \quad \dfrac{1}{L}\right]$
- Matrica $\mathbf{D} = [EA]$
- Matrica krutosti

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dx = \frac{\boldsymbol{EA}}{\boldsymbol{L}}\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} \\ \mathbf{-1} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Komentar:
Kod opruge umesto EA/L treba staviti krutost opruge c

1D KE. Štapni KE. Slobodna torzija. Matrica krutosti



- Vektori stepeni slobode (uvijanje) i generalisanih sila (momenti torzije) u čvorovima KE su

$$\mathbf{d}^T = \{\varphi_{1x} \quad \varphi_{2x}\} \qquad \mathbf{R}^T = \{M_{1x} \quad M_{2x}\}$$

- Raspodela uvijanja u polju KE može da se prikaže u zavisnosti od uvijanja u čvorovima na sledeći način

$$\varphi_x = N_1\varphi_{1x} + N_2\varphi_{2x} \qquad \boldsymbol{\phi}_x = \mathbf{N}\mathbf{d} = [N_1 \quad N_2]\begin{Bmatrix}\varphi_{1x}\\ \varphi_{2x}\end{Bmatrix}$$

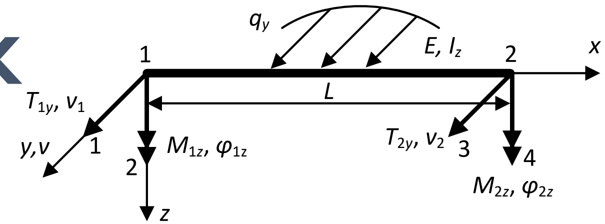
- Usvajaju se IF kao i kod štapnog KE (aksijalno naprezanje)

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \qquad N_2 = \frac{x}{L} \qquad \mathbf{N} = [N_1 \quad N_2] = \left[1 - \frac{x}{L} \quad \frac{x}{L}\right]$$

- Matrica **B** $\quad \mathbf{B} = \mathbf{D}_k\mathbf{N} = \left[\frac{d}{dx}\right][N_1 \quad N_2] = \left[\frac{dN_1}{dx} \quad \frac{dN_2}{dx}\right] = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L}\right]$
- Matrica $\mathbf{D} = [GI_x]$
- Matrica krutosti

$$\mathbf{k} = \int_0^L \mathbf{B}^T\mathbf{D}\mathbf{B}dx = \frac{\boldsymbol{GI_x}}{\boldsymbol{L}}\begin{bmatrix}\mathbf{1} & \mathbf{-1}\\ \mathbf{-1} & \mathbf{1}\end{bmatrix}$$

1D KE. Gredni KE. Interpolacione funkcije. Direktan postupak



- **Savijanje u x – y ravni**
  - Posmatra se gredni KE izložen savijanju u x – y ravni (četiri stepena slobode) za koji se usvaja raspodela pomeranja u polju KE u obliku polinoma koji sadrži četiri koeficijenta

$$v = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3 \qquad \mathbf{A} = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \qquad \boldsymbol{\alpha} = \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

  - Za čvorove KE sledi ($\varphi_z = \frac{dv}{dx} = \alpha_2 + 2\alpha_3 x + 3\alpha_4 x^2$)

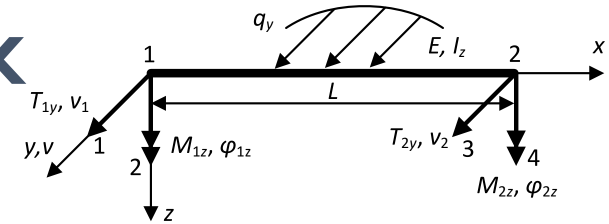
$$x = 0 \qquad v = v_1 = \alpha_1$$

$$x = 0 \qquad \varphi_z = \varphi_{1z} = \alpha_2$$

$$x = L \qquad v = v_2 = \alpha_1 + L\alpha_2 + L^2\alpha_3 + L^3\alpha_4$$

$$x = L \qquad \varphi_z = \varphi_{2z} = \alpha_2 + 2L\alpha_3 + 3L^2\alpha_4$$

1D KE. Gredni KE. Interpolacione funkcije. Direktan postupak



- **Savijanje u x – y ravni**
  - Vektor generalisanih pomeranja čvorova KE glasi

$$\mathbf{d} = \mathbf{C}\boldsymbol{\alpha} \rightarrow \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_{1z} \\ v_2 \\ \varphi_{2z} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix}$$

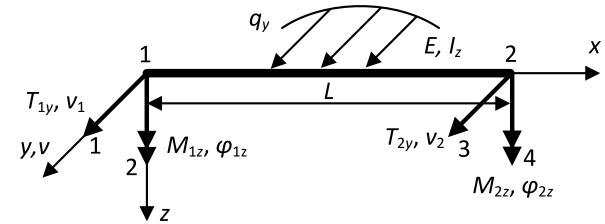
$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & L & L^2 & L^3 \\ 0 & 1 & 2L & 3L^2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

  - Matrica IF glasi

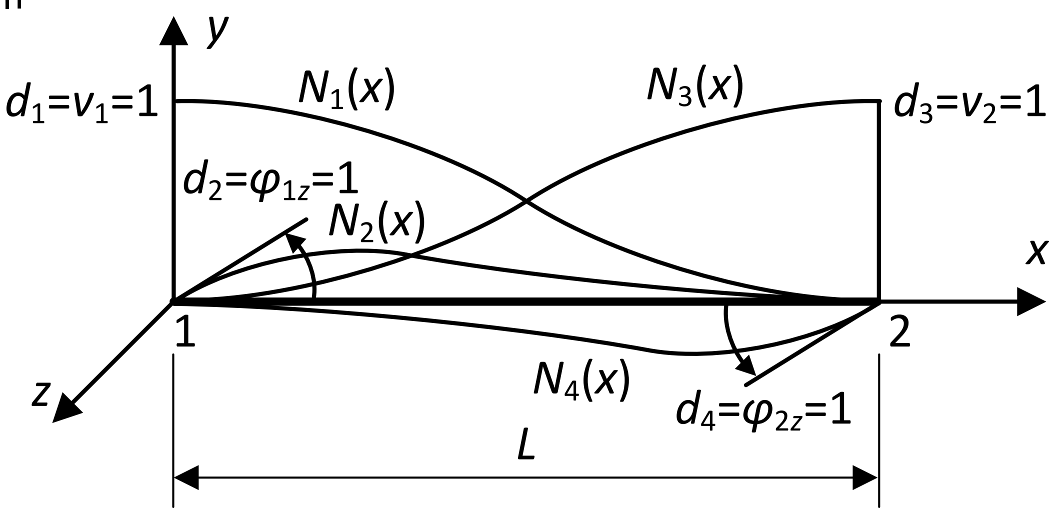
$$\mathbf{N} = \mathbf{A}\mathbf{C}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{L^2} & -\frac{2}{L} & \frac{3}{L^2} & -\frac{1}{L} \\ \frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} & -\frac{2}{L^3} & \frac{1}{L^2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} & x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} & \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} & -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \end{bmatrix}$$

1D KE. Gredni KE. Interpolacione funkcije



- **Savijanje u x – y ravni**
  - IF



$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_2(x) = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

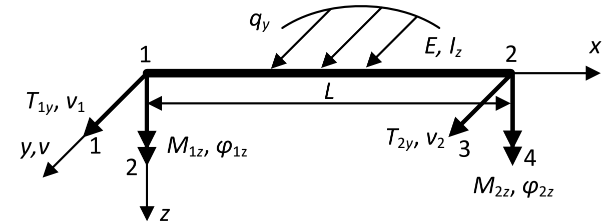
$$N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}$$

$$N_4(x) = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

- Raspodela pomeranja u polju KE u zavisnosti od generalisanih pomeranja u čvorovima glasi

$$v = \mathbf{Nd} = v_1 N_1(x) + \varphi_{1z} N_2(x) + v_2 N_3(x) + \varphi_{2z} N_4(x)$$

1D KE. Gredni KE. Interpolacione funkcije



- **Savijanje u x – y ravni**
  - **IF mogu da se odrede rešavanjem homogene diferencijalne jednačine savijanja**

$$EI_z \frac{d^4 v}{dx^4} = 0$$

  - Rešenje se pretpostavlja u obliku $v = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 x^2 + \alpha_4 x^3$
  - Za IF $N_1(x)$ granični uslovi glase

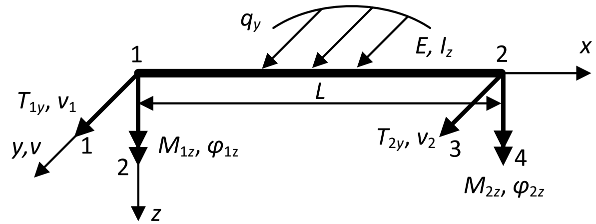
$$v(0) = 1 \qquad \varphi_z = \frac{dv}{dx}|_{x=0} = 0 \qquad v(L) = 0 \qquad \varphi_z = \frac{dv}{dx}|_{x=L} = 0$$

  - Koristeći granične uslove sledi

$$v(0) = \alpha_1 = 1 \qquad \varphi_z = \frac{dv}{dx}|_{x=0} = \alpha_2 = 0$$

$$v(L) = \alpha_1 + \alpha_2 L + \alpha_3 L^2 + \alpha_4 L^3 = 0 \qquad \varphi_z = \frac{dv}{dx}|_{x=L} = \alpha_2 + 2L\alpha_3 + 3L^2\alpha_4 = 0$$

1D KE. Gredni KE. Interpolacione funkcije



- **Savijanje u x – y ravni**
  - Rešavanjem prethodnog sistema sledi

$$\alpha_1 = 1 \qquad \alpha_2 = 0 \qquad \alpha_3 = -\frac{3}{L^2} \qquad \alpha_4 = \frac{2}{L^3}$$

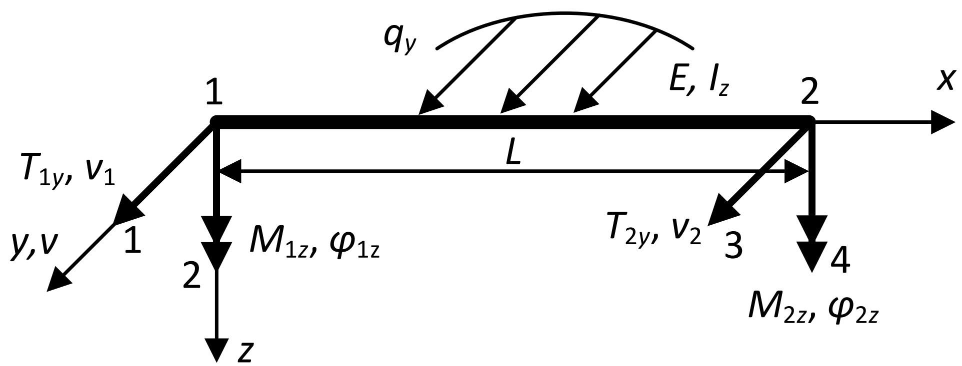
  - IF glasi

$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3}$$

  - Analognim postupkom se određuju i ostale IF
  - IF predstavljaju tačno rešenje homogene diferencijalne jednačine savijanja KE u x – y ravni uz odgovarajuće granične uslove po pomeranjima (jedinična stanja pomeranja krajeva KE)
  - $N_i(x)$ predstavlja elastičnu liniju grede, u x – y ravni, usled stanja pomeranja $d_i = 1$
  - IF N_i za čvor i ima vrednost 1, a u svim ostalim čvorovima KE ima vrednost 0

1D KE. Gredni KE. Matrica krutosti

- **Savijanje u x – y ravni**



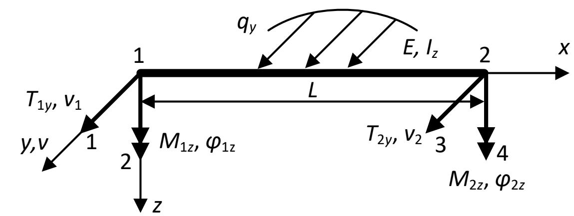
  - Vektori generalisanih pomeranja (stepeni slobode) i generalisanih sila u čvorovima KE

$$\mathbf{d}^T = \{v_1 \quad \varphi_{1z} \quad v_2 \quad \varphi_{2z}\} \qquad \mathbf{R}^T = \{T_{1y} \quad M_{1z} \quad T_{2y} \quad M_{2z}\}$$

  - Raspodela pomeranja u polju KE u zavisnosti od generalisanih pomeranja u čvorovima glasi

$$v = N_1 v_1 + N_2 \varphi_{1z} + N_3 v_2 + N_4 \varphi_{2z} \qquad \mathbf{v} = \mathbf{Nd} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} v_1 \\ \varphi_{1z} \\ v_2 \\ \varphi_{2z} \end{Bmatrix}$$

1D KE. Gredni KE. Matrica krutosti



- **Savijanje u x – y ravni**
  - IF su

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_2 = x - \frac{2x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \qquad N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_4 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2}$$

$$\mathbf{N}_{xy} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

  - Matrica $\mathbf{B}_{xy}$

$$\mathbf{B}_{xy} = \mathbf{D}_{kxy}\mathbf{N}_{xy} = \left[\frac{d^2}{dx^2}\right][N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] = \left[-\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad \frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right]$$

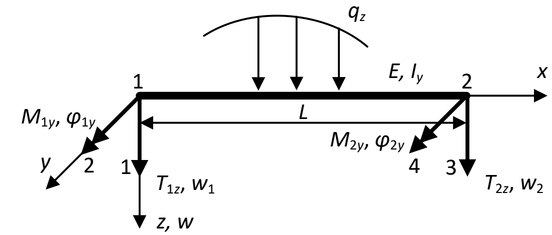
  - Matrica $\mathbf{D}_{xy}$

$$\mathbf{D}_{xy} = [EI_z]$$

  - Matrica krutosti

$$\mathbf{k}_{xy} = \int_o^L \mathbf{B}_{xy}^T \mathbf{D}_{xy} \mathbf{B}_{xy} dx = \frac{EI_z}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

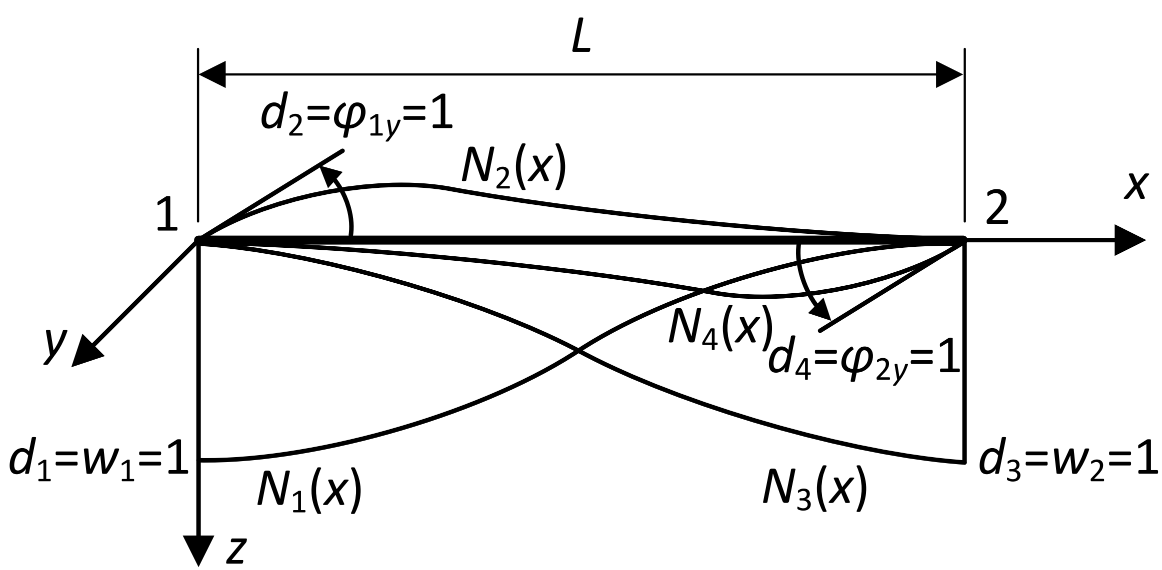
1D KE. Gredni KE. Interpolacione funkcije



- **Savijanje u x – z ravni**
  - Analognim postupkom kao i za savijanje u x – y ravni određuju se IF

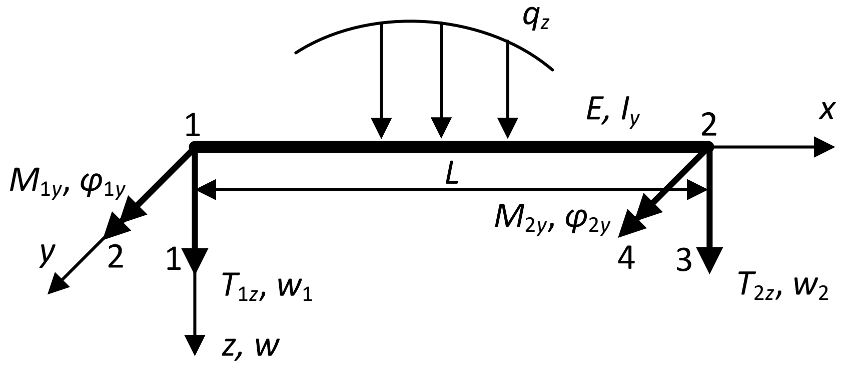
$$N_1(x) = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_2(x) = -x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \qquad N_3(x) = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_4(x) = \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}$$

$$w = \mathbf{Nd} = w_1 N_1(x) + \varphi_{1y} N_2(x) + w_2 N_3(x) + \varphi_{2y} N_4(x)$$



1D KE. Gredni KE. Matrica krutosti

- **Savijanje u x – z ravni**



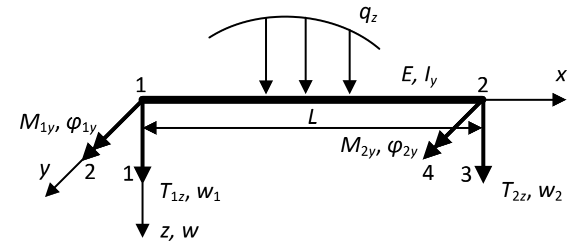
  - Vektori generalisanih pomeranja (stepeni slobode) i generalisanih sila u čvorovima KE

$$\mathbf{d}^T = \{w_1 \quad \varphi_{1y} \quad w_2 \quad \varphi_{2y}\} \qquad \mathbf{R}^T = \{T_{1z} \quad M_{1y} \quad T_{2z} \quad M_{2y}\}$$

  - Raspodela pomeranja u polju KE u zavisnosti od generalisanih pomeranja u čvorovima glasi

$$w = N_1 w_1 + N_2 \varphi_{1y} + N_3 w_2 + N_4 \varphi_{2y} \qquad \mathbf{w} = \mathbf{Nd} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] \begin{Bmatrix} w_1 \\ \varphi_{1y} \\ w_2 \\ \varphi_{2y} \end{Bmatrix}$$

1D KE. Gredni KE. Matrica krutosti



- **Savijanje u x – z ravni**
  - IF su

$$N_1 = 1 - \frac{3x^2}{L^2} + \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_2 = -x + \frac{2x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2} \qquad N_3 = \frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3} \qquad N_4 = \frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}$$

$$\mathbf{N}_{xz} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4]$$

  - Matrica $\mathbf{B}_{xz}$

$$\mathbf{B}_{xz} = \mathbf{D}_{kxz}\mathbf{N}_{xz} = \left[-\frac{d^2}{dx^2}\right][N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4] = \left[\frac{6}{L^2} - \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{6x}{L^2} \quad -\frac{6}{L^2} + \frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L} + \frac{6x}{L^2}\right]$$

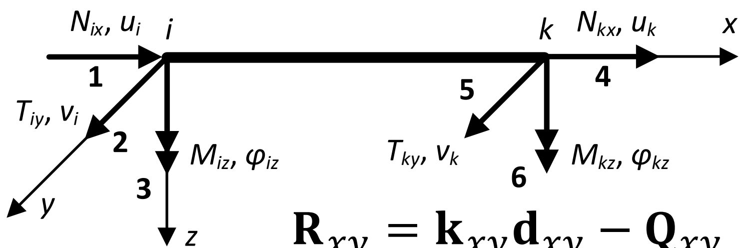
  - Matrica $\mathbf{D}_{xz}$

$$\mathbf{D}_{xz} = [EI_y]$$

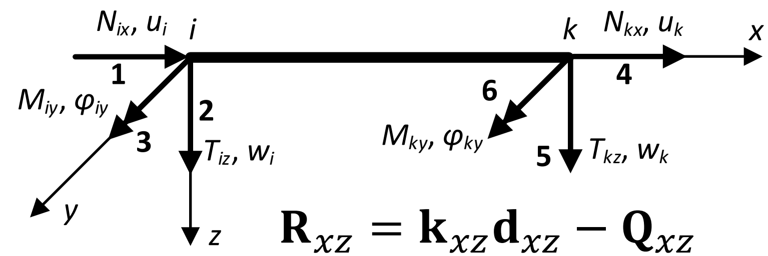
  - Matrica krutosti

$$\mathbf{k}_{xz} = \int_o^L \mathbf{B}_{xz}^T \mathbf{D}_{xz} \mathbf{B}_{xz} dx = \frac{EI_y}{L^3}\begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix}$$

1D KE. Gredni KE. Aksijalno naprezanje i savijanje u x-y i x-z ravni. Matrica krutosti



$$\mathbf{R}_{xy} = \mathbf{k}_{xy}\mathbf{d}_{xy} - \mathbf{Q}_{xy}$$



$$\mathbf{R}_{xz} = \mathbf{k}_{xz}\mathbf{d}_{xz} - \mathbf{Q}_{xz}$$

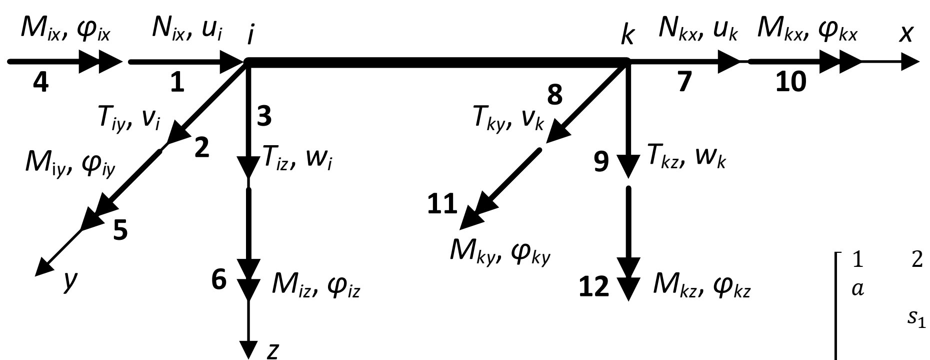
$$\mathbf{k}_{xy} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}_{6x6} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$$\mathbf{k}_{xz} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & -\frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & \frac{2EI_y}{L} & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & \frac{4EI_y}{L} \end{bmatrix}_{6x6} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$$\mathbf{R}_{xy} = \begin{Bmatrix} N_{ix} \\ T_{iy} \\ M_{iz} \\ N_{kx} \\ T_{ky} \\ M_{kz} \end{Bmatrix}_{6x1} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \qquad \mathbf{d}_{xy} = \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_{iz} \\ u_k \\ v_k \\ \varphi_{kz} \end{Bmatrix}_{6x1} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \qquad \mathbf{Q}_{xy} = \begin{Bmatrix} Q_{ix} \\ Q_{iy} \\ Q_{izz} \\ Q_{kx} \\ Q_{ky} \\ Q_{kzz} \end{Bmatrix}_{6x1} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

$$\mathbf{R}_{xz} = \begin{Bmatrix} N_{ix} \\ T_{iz} \\ M_{iy} \\ N_{kx} \\ T_{kz} \\ M_{ky} \end{Bmatrix}_{6x1} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \qquad \mathbf{d}_{xz} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_{iy} \\ u_k \\ w_k \\ \varphi_{ky} \end{Bmatrix}_{6x1} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array} \qquad \mathbf{Q}_{xz} = \begin{Bmatrix} Q_{ix} \\ Q_{iz} \\ Q_{iyy} \\ Q_{kx} \\ Q_{kz} \\ Q_{kyy} \end{Bmatrix}_{6x1} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{array}$$

1D KE. Gredni KE u prostoru. Matrica krutosti



$$\mathbf{R} = \mathbf{kd} - \mathbf{Q}$$

$$\mathbf{R} = \left\{\begin{matrix} N_{ix} & 1 \\ T_{iy} & 2 \\ T_{iz} & 3 \\ M_{ix} & 4 \\ M_{iy} & 5 \\ M_{iz} & 6 \\ N_{kx} & 7 \\ T_{ky} & 8 \\ T_{kz} & 9 \\ M_{kx} & 10 \\ M_{ky} & 11 \\ M_{kz} & 12 \end{matrix}\right\}_{12\text{x}1} \quad \mathbf{d} = \left\{\begin{matrix} u_i & 1 \\ v_i & 2 \\ w_i & 3 \\ \varphi_{ix} & 4 \\ \varphi_{iy} & 5 \\ \varphi_{iz} & 6 \\ u_k & 7 \\ v_k & 8 \\ w_k & 9 \\ \varphi_{kx} & 10 \\ \varphi_{ky} & 11 \\ \varphi_{kz} & 12 \end{matrix}\right\}_{12\text{x}1} \quad \mathbf{Q} = \left\{\begin{matrix} Q_{ix} & 1 \\ Q_{iy} & 2 \\ Q_{iz} & 3 \\ Q_{ixx} & 4 \\ Q_{iyy} & 5 \\ Q_{izz} & 6 \\ Q_{kx} & 7 \\ Q_{ky} & 8 \\ Q_{kz} & 9 \\ Q_{kxx} & 10 \\ Q_{kyy} & 11 \\ Q_{kzz} & 12 \end{matrix}\right\}_{12\text{x}1}$$

$$\mathbf{k} = \left[\begin{array}{cccccccccccc|c} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & \\ a & & & & & & -a & & & & & & 1 \\ & s_1 & & & & s_5 & & -s_1 & & & & s_5 & 2 \\ & & s_2 & & -s_6 & & & & -s_2 & & -s_6 & & 3 \\ & & & t & & & & & & -t & & & 4 \\ & & -s_6 & & s_3 & & & & s_6 & & s_7 & & 5 \\ & s_5 & & & & s_4 & & -s_5 & & & & s_8 & 6 \\ -a & & & & & & a & & & & & & 7 \\ & -s_1 & & & & -s_5 & & s_1 & & & & -s_5 & 8 \\ & & -s_2 & & s_6 & & & & s_2 & & s_6 & & 9 \\ & & & -t & & & & & & t & & & 10 \\ & & -s_6 & & s_7 & & & & s_6 & & s_3 & & 11 \\ & s_5 & & & & s_8 & & -s_5 & & & & s_4 & 12 \end{array}\right]_{12\text{x}12}$$

$$a = \frac{EA}{L}, \quad s_1 = \frac{12EI_z}{L^3}, \quad s_2 = \frac{12EI_y}{L^3}, \quad t = \frac{GI_x}{L}, \quad s_3 = \frac{4EI_y}{L}$$

$$s_4 = \frac{4EI_z}{L}, \quad s_5 = \frac{6EI_z}{L^2}, \quad s_6 = \frac{6EI_y}{L^2}, \quad s_7 = \frac{2EI_y}{L}, \quad s_8 = \frac{2EI_z}{L}$$

1D KE. Statičko značenje elemenata matrice krutosti

- Element k_{ij} $(i, j = 1, 2, \dots, 6)$ matrice krutosti KE ima značenje do koga se dolazi kada se u razvijenom obliku napiše izraz za i-tu generalisanu silu R_i $(j = 1, 2, \dots, 6)$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \boldsymbol{R_3} \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ \boldsymbol{k_{31}} & \boldsymbol{k_{32}} & \boldsymbol{k_{33}} & \boldsymbol{k_{34}} & \boldsymbol{k_{35}} & \boldsymbol{k_{36}} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d_1} \\ \boldsymbol{d_2} \\ \boldsymbol{d_3} \\ \boldsymbol{d_4} \\ \boldsymbol{d_5} \\ \boldsymbol{d_6} \end{Bmatrix} \qquad R_i = k_{i1}d_1 + k_{i2}d_2 + \dots + k_{i6}d_6 = \sum_{j=1}^{6} k_{ij}d_j$$

- odnosno, element k_{ij} (npr. k_{34}) matrice krutosti KE predstavlja generalisanu silu R_i $(R_3 = M_i)$ kada je generalisano pomeranje $d_j = 1$ $(d_4 = 1)$, a sva ostala generalisana pomeranja $d_i = 0$, $i \neq j$ $(d_1 = d_2 = d_3 = d_5 = d_6 = 0)$

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \boldsymbol{R_3} \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ \boldsymbol{k_{31}} & \boldsymbol{k_{32}} & \boldsymbol{k_{33}} & \boldsymbol{k_{34}} & \boldsymbol{k_{35}} & \boldsymbol{k_{36}} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d_1 = 0} \\ \boldsymbol{d_2 = 0} \\ \boldsymbol{d_3 = 0} \\ \boldsymbol{d_4 = 1} \\ \boldsymbol{d_5 = 0} \\ \boldsymbol{d_6 = 0} \end{Bmatrix}$$ stanje pomeranja $d_4 = 1$

1D KE. Statičko značenje elemenata matrice krutosti

- Elementi j-te kolone matrice krutosti $(k_{1j}, k_{2j}, \dots, k_{6j})$ predstavljaju generalisane sile na krajevima KE pri stanju pomeranja $d_j = 1$

$$\begin{Bmatrix} \boldsymbol{R_1} \\ \boldsymbol{R_2} \\ \boldsymbol{R_3} \\ \boldsymbol{R_4} \\ \boldsymbol{R_5} \\ \boldsymbol{R_6} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & \boldsymbol{k_{14}} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & \boldsymbol{k_{24}} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & \boldsymbol{k_{34}} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & \boldsymbol{k_{44}} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & \boldsymbol{k_{54}} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & \boldsymbol{k_{64}} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{d_1} = 0 \\ \boldsymbol{d_2} = 0 \\ \boldsymbol{d_3} = 0 \\ \boldsymbol{d_4} = 1 \\ \boldsymbol{d_5} = 0 \\ \boldsymbol{d_6} = 0 \end{Bmatrix}$$

Obeležavanje brojevima vrsta i kolona u LKS

Vektori generalisanih sila na krajevima KE za odgovarajuća jedinična stanja generalisanih pomeranja krajeva KE (kratko: stanja $d_j = 1$)

stanje $d_1 = u_i = 1$

stanje $d_2 = v_i = 1$

stanje $d_3 = \varphi_i = 1$

stanje $d_4 = u_k = 1$

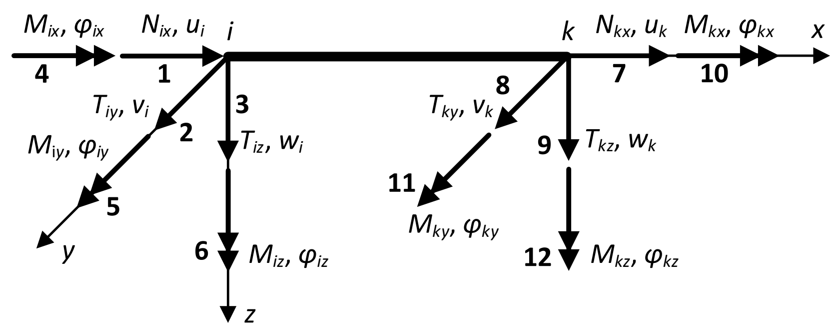
stanje $d_5 = v_k = 1$

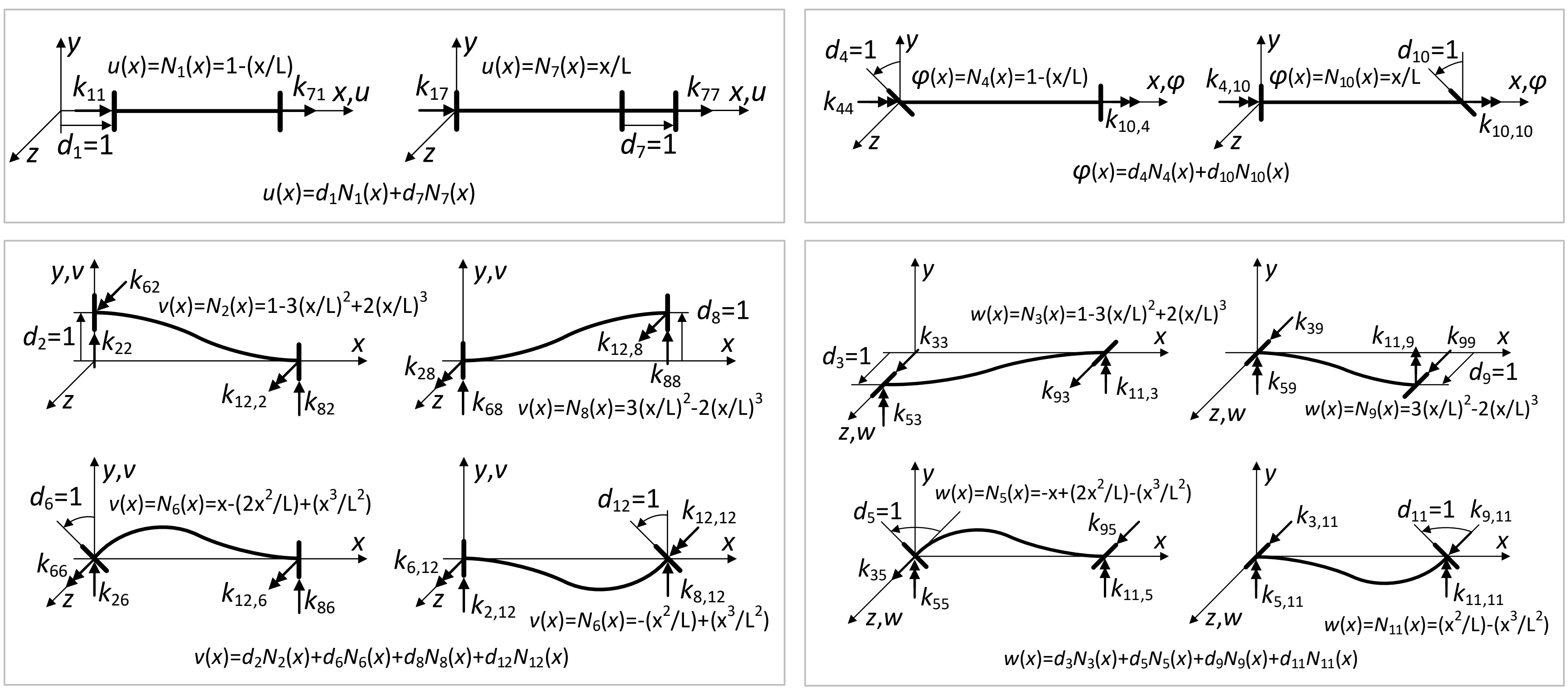
stanje $d_6 = \varphi_k = 1$

$$\begin{array}{c} N_i \xrightarrow{1} \\ T_i \xrightarrow{2} \\ M_i \xrightarrow{3} \\ N_k \xrightarrow{4} \\ T_k \xrightarrow{5} \\ M_k \xrightarrow{6} \end{array} \begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \\ R_5 \\ R_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} & k_{15} & k_{16} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} & k_{24} & k_{25} & k_{26} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} & k_{34} & k_{35} & k_{36} \\ k_{41} & k_{42} & k_{43} & k_{44} & k_{45} & k_{46} \\ k_{51} & k_{52} & k_{53} & k_{54} & k_{55} & k_{56} \\ k_{61} & k_{62} & k_{63} & k_{64} & k_{65} & k_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \\ d_5 \\ d_6 \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{c|c} & \begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} \xrightarrow{1} \\ \xrightarrow{2} \\ \xrightarrow{3} \\ \xrightarrow{4} \\ \xrightarrow{5} \\ \xrightarrow{6} \end{array} & \begin{bmatrix} \boldsymbol{k_{11}} & \boldsymbol{k_{12}} & \boldsymbol{k_{13}} & \boldsymbol{k_{14}} & \boldsymbol{k_{15}} & \boldsymbol{k_{16}} \\ \boldsymbol{k_{21}} & \boldsymbol{k_{22}} & \boldsymbol{k_{23}} & \boldsymbol{k_{24}} & \boldsymbol{k_{25}} & \boldsymbol{k_{26}} \\ \boldsymbol{k_{31}} & \boldsymbol{k_{32}} & \boldsymbol{k_{33}} & \boldsymbol{k_{34}} & \boldsymbol{k_{35}} & \boldsymbol{k_{36}} \\ \boldsymbol{k_{41}} & \boldsymbol{k_{42}} & \boldsymbol{k_{43}} & \boldsymbol{k_{44}} & \boldsymbol{k_{45}} & \boldsymbol{k_{46}} \\ \boldsymbol{k_{51}} & \boldsymbol{k_{52}} & \boldsymbol{k_{53}} & \boldsymbol{k_{54}} & \boldsymbol{k_{55}} & \boldsymbol{k_{56}} \\ \boldsymbol{k_{61}} & \boldsymbol{k_{62}} & \boldsymbol{k_{63}} & \boldsymbol{k_{64}} & \boldsymbol{k_{65}} & \boldsymbol{k_{66}} \end{bmatrix} \end{array}$$

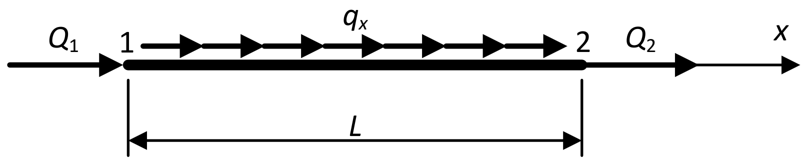
1D KE. Statičko značenje elemenata matrice krutosti



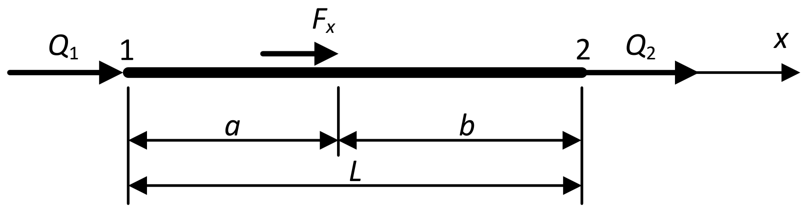


1D KE. Vektor ekvivalentnog opterećenja

- Naziva se još i vektor ekvivalentnog čvornog opterećenja ili vektor konzistentnog koncentrisanog opterećenja
  - Može da se odredi i iz uslova da su virtualni radovi stvarnog spoljašnjeg opterećenja po KE i čvornih generalisanih sila međusobno jednaki



$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\end{Bmatrix}=\int_0^L \mathbf{N}^T q_x dx = q_x\int_0^L \begin{bmatrix}N_1(x)\\N_2(x)\end{bmatrix}dx = q_x L\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}\end{Bmatrix}$$

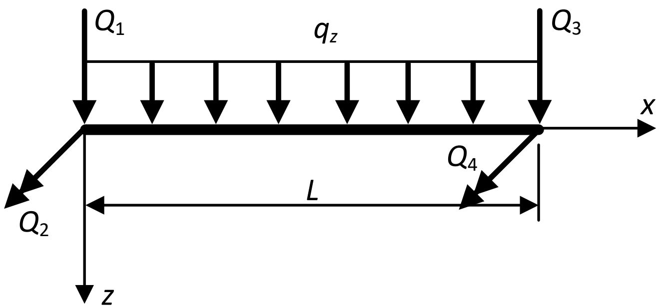


$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\end{Bmatrix}=F_x\cdot\mathbf{N}^T(a)=F_x\begin{bmatrix}N_1(a)\\N_2(a)\end{bmatrix}=F_x\begin{Bmatrix}1-\frac{a}{L}\\ \frac{a}{L}\end{Bmatrix}$$

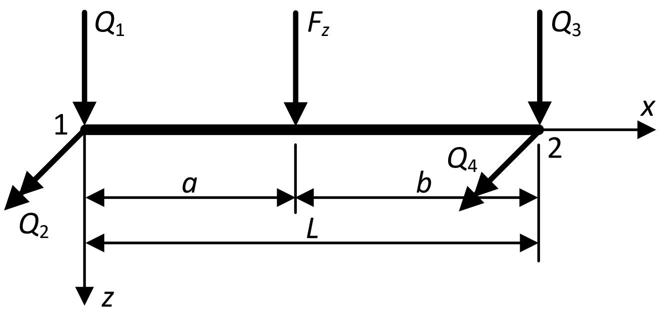
Temperaturna promena

$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\end{Bmatrix}=\int_0^L \mathbf{B}^T\mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}_0 dx=\int_0^L\begin{bmatrix}\frac{dN_1(x)}{dx}\\ \frac{dN_2(x)}{dx}\end{bmatrix}EA\,\alpha_t t dx = EA\,\alpha_t t\begin{Bmatrix}-1\\1\end{Bmatrix}$$

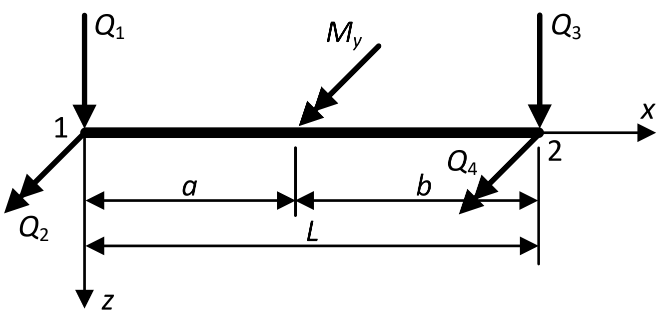
1D KE. Vektor ekvivalentnog opterećenja



$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\end{Bmatrix}=\int_0^L \mathbf{N}^T q_z dx = q_z\int_0^L\begin{bmatrix}N_1(x)\\N_2(x)\\N_3(x)\\N_4(x)\end{bmatrix}dx = q_z L\begin{Bmatrix}\frac{1}{2}\\-\frac{L}{12}\\\frac{1}{2}\\\frac{L}{12}\end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\end{Bmatrix}=F_z\cdot\mathbf{N}^T(a)=F_z\begin{bmatrix}N_1(a)\\N_2(a)\\N_3(a)\\N_4(a)\end{bmatrix}=F_z\begin{Bmatrix}1-\frac{3a^2}{L^2}+\frac{2a^3}{L^3}\\-a+\frac{2a^2}{L}-\frac{a^3}{L^2}\\\frac{3a^2}{L^2}-\frac{2a^3}{L^3}\\\frac{a^2}{L}-\frac{a^3}{L^2}\end{Bmatrix}$$



$$\mathbf{Q}=\begin{Bmatrix}Q_1\\Q_2\\Q_3\\Q_4\end{Bmatrix}=-M_y\cdot\left(\frac{d\mathbf{N}^T}{dx}\right)_{x=a}=-M_y\begin{bmatrix}\frac{dN_1}{dx}\\\frac{dN_2}{dx}\\\frac{dN_3}{dx}\\\frac{dN_4}{dx}\end{bmatrix}_{x=a}=M_y\begin{Bmatrix}\frac{6a}{L^2}-\frac{6a^2}{L^3}\\1-\frac{4a}{L}+\frac{3a^2}{L^2}\\-\frac{6a}{L^2}+\frac{6a^2}{L^3}\\-\frac{2a}{L}+\frac{3a^2}{L^2}\end{Bmatrix}$$

Komentar:
Elementi vektora Q su po apsolutnoj vrednosti (i suprotnog znaka) jednaki vrednostima generalisanih reakcija usled spoljašnjih dejstava u čvorovima KE koji su nepokretno uklješteni

1D KE. Oslobađanje veza

- **Oslobađa se momentna veza na početku štapa (stepen slobode 2; savijanje u $x-y$ ravni)**

Stepeni slobode pri savijanju grednog KE

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \\ R_4 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{L^3} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}$$

$$R_1 = \frac{EI}{L^3}[12d_1 \quad 6Ld_2 \quad -12d_3 \quad 6Ld_4] - Q_1$$

$$R_2 = \frac{EI}{L^3}[6Ld_1 \quad 4L^2d_2 \quad -6Ld_3 \quad 2L^2d_4] - Q_2 = 0 \Rightarrow d_2 = -\frac{3}{2L}d_1 + \frac{3}{2L}d_3 - \frac{1}{2}d_4 + \frac{L}{4EI}Q_2$$

$$R_3 = \frac{EI}{L^3}[-12d_1 \quad -6Ld_2 \quad 12d_3 \quad -6Ld_4] - Q_3$$

$$R_4 = \frac{EI}{L^3}[6Ld_1 \quad 2L^2d_2 \quad -6Ld_3 \quad 4L^2d_4] - Q_4$$

1D KE. Oslobađanje veza

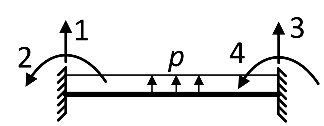
- **Oslobađa se momentna veza na početku štapa (stepen slobode 2; savijanje u $x-y$ ravni)**

$$R_1 = \frac{EI}{L^3}\left[3d_1 \quad -3d_3 \quad 3Ld_4\right] + \left(-Q_1 + \frac{3}{2L}Q_2\right) \qquad R_2 = 0$$

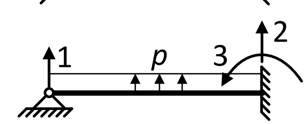
$$R_3 = \frac{EI}{L^3}\left[-3d_1 \quad 3d_3 \quad -3Ld_4\right] + \left(-Q_3 - \frac{3}{2L}Q_2\right) \qquad R_4 = \frac{EI}{L^3}\left[3Ld_1 \quad -3Ld_3 \quad 3L^2d_4\right] + \left(-Q_4 + \frac{1}{2}Q_2\right)$$

$$\mathbf{R} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & 3L \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & -3L \\ 3L & 0 & -3L & 3L^2 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} Q_1 - \frac{3}{2L}Q_2 \\ 0 \\ Q_3 + \frac{3}{2L}Q_2 \\ Q_4 - \frac{1}{2}Q_2 \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{Q} = \begin{Bmatrix} Q_1 - \frac{3}{2L}Q_2 \\ 0 \\ Q_3 - \frac{3}{2L}Q_2 \\ Q_4 - \frac{1}{2}Q_2 \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_{gk}^{s} = \frac{EI}{L^3}\begin{bmatrix} 3 & -3 & 3L \\ -3 & 3 & -3L \\ 3L & -3L & 3L^2 \end{bmatrix}$$



$$\mathbf{Q}^T = \begin{array}{cccc} Q_1 & Q_2 & Q_3 & Q_4 \end{array}$$
$$\mathbf{Q}^T = \left\{ \frac{p_yL}{2} \quad \frac{p_yL^2}{12} \quad \frac{p_yL}{2} \quad -\frac{p_yL^2}{12} \right\}$$



$$\mathbf{Q}^T = \begin{array}{ccc} Q_1 & Q_2 & Q_3 \end{array}$$
$$\mathbf{Q}^T = \left\{ \frac{3p_yL}{8} \quad \frac{5p_yL}{8} \quad -\frac{p_yL^2}{8} \right\}$$

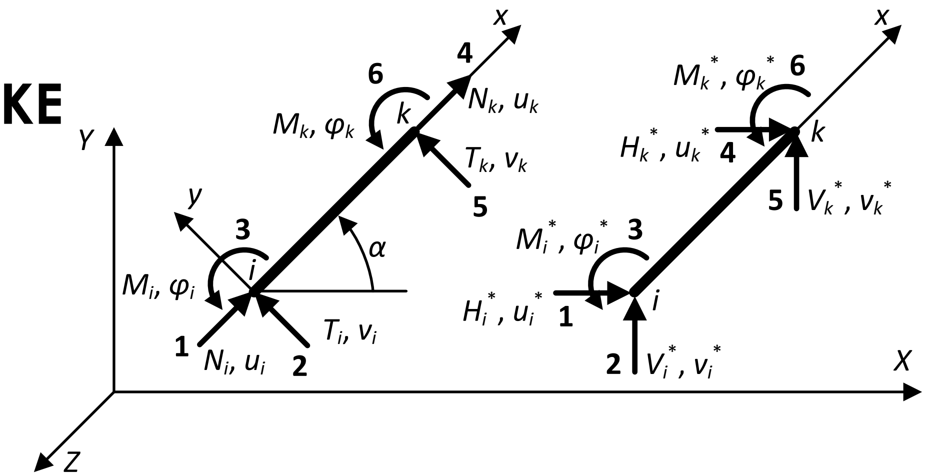
1D KE. Transformacija vektora i matrica

- **Ravanski sistem grednih KE**

$$u_i = u_i^* \cos\alpha + v_i^* \sin\alpha$$

$$v_i = -u_i^* \sin\alpha + v_i^* \cos\alpha$$

$$\varphi_i = \varphi_i^*$$



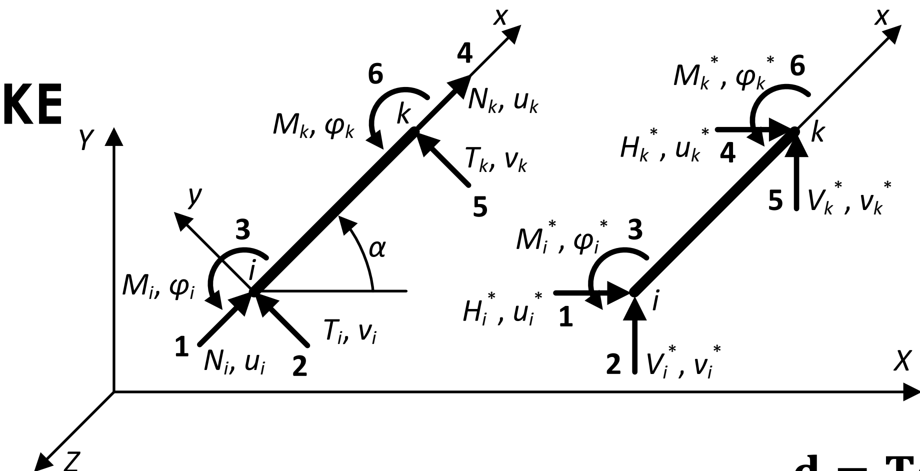
$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ \varphi_i^* \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_i = \mathbf{t}\mathbf{d}_i^* \qquad \mathbf{d}_k = \mathbf{t}\mathbf{d}_k^* \qquad \mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{d}^*$$

$$\mathbf{d} = \begin{Bmatrix} u_i & 1 \\ v_i & 2 \\ \varphi_i & 3 \\ u_k & 4 \\ v_k & 5 \\ \varphi_k & 6 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{d}^* = \begin{Bmatrix} u_i^* & 1 \\ v_i^* & 2 \\ \varphi_i^* & 3 \\ u_k^* & 4 \\ v_k^* & 5 \\ \varphi_k^* & 6 \end{Bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{t}_i & 0 \\ 0 & \mathbf{t}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1D KE. Transformacija vektora i matrica

- **Ravanski sistem gredni KE**



$$u_i^* = u_i \cos\alpha - v_i \sin\alpha$$

$$v_i^* = u_i \sin\alpha + v_i \cos\alpha$$

$$\varphi_i^* = \varphi_i$$

$$\begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ \varphi_i^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{d}_i^* = \mathbf{t}^T \mathbf{d}_i \qquad \mathbf{d}^* = \mathbf{T}^T \mathbf{d}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{d}^* \qquad \mathbf{d}^* = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{d} \qquad \mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T$$

$$\cos\alpha = \frac{X_k - X_i}{L} \qquad \sin\alpha = \frac{Y_k - Y_i}{L} \qquad L = \sqrt{(X_k - X_i)^2 + (Y_k - Y_i)^2}$$

$$\mathbf{Q} = \mathbf{T}\mathbf{Q}^* \qquad \mathbf{Q}^* = \mathbf{T}^T\mathbf{Q} \qquad \mathbf{R} = \mathbf{T}\mathbf{R}^* \qquad \mathbf{R}^* = \mathbf{T}^T\mathbf{R}$$

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{k}\mathbf{d} \\ \mathbf{R} &= \mathbf{T}\mathbf{R}^* \\ \mathbf{d} &= \mathbf{T}\mathbf{d}^* \end{aligned}\right\} \quad \mathbf{T}\mathbf{R}^* = \mathbf{k}\mathbf{T}\mathbf{d}^* \qquad \mathbf{T}^T\mathbf{T}\mathbf{R}^* = \mathbf{T}^T\mathbf{k}\mathbf{T}\mathbf{d}^* \qquad \mathbf{R}^* = \mathbf{k}^*\mathbf{d}^*$$

$$\mathbf{k}^* = \mathbf{T}^T\mathbf{k}\mathbf{T}$$

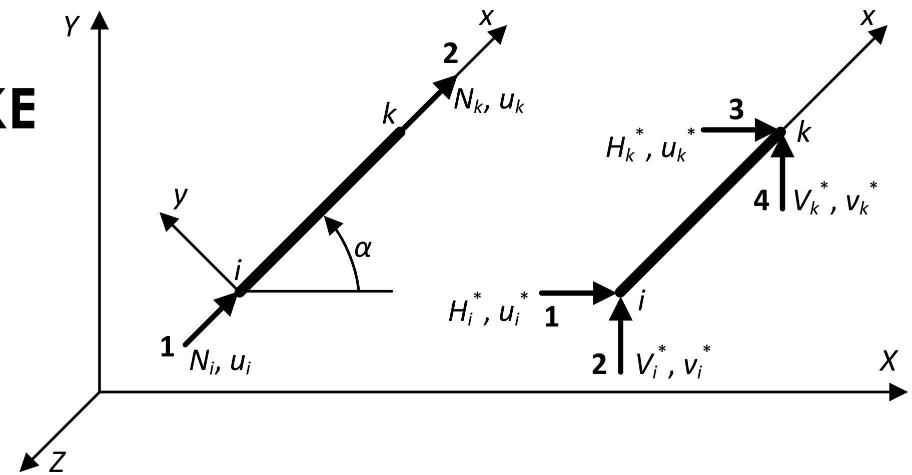
$$\mathbf{R}^* = \mathbf{k}^*\mathbf{d}^* - \mathbf{Q}^*$$

1D KE. Transformacija vektora i matrica

- **Ravanski sistem štapnih KE**

$$u_i = u_i^* \cos\alpha + v_i^* \sin\alpha$$

$$u_k = u_k^* \cos\alpha + v_k^* \sin\alpha$$

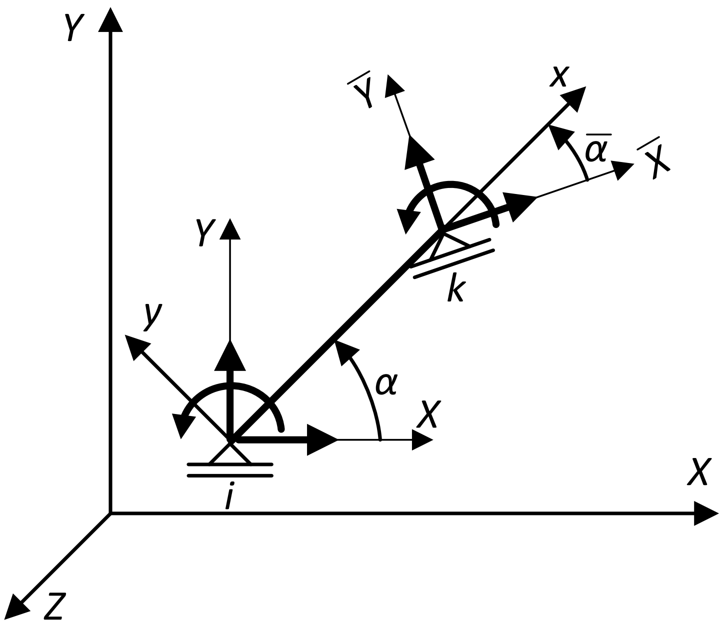


$$\begin{Bmatrix} u_i \\ u_k \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ u_k^* \\ v_k^* \end{Bmatrix} \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\alpha & \sin\alpha \end{bmatrix}$$

$$k^* = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha \\ \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha \\ -\cos^2\alpha & -\cos\alpha\sin\alpha & \cos^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha \\ -\cos\alpha\sin\alpha & -\sin^2\alpha & \cos\alpha\sin\alpha & \sin^2\alpha \end{bmatrix}$$

1D KE. Transformacija vektora i matrica. *Kosi* oslonac

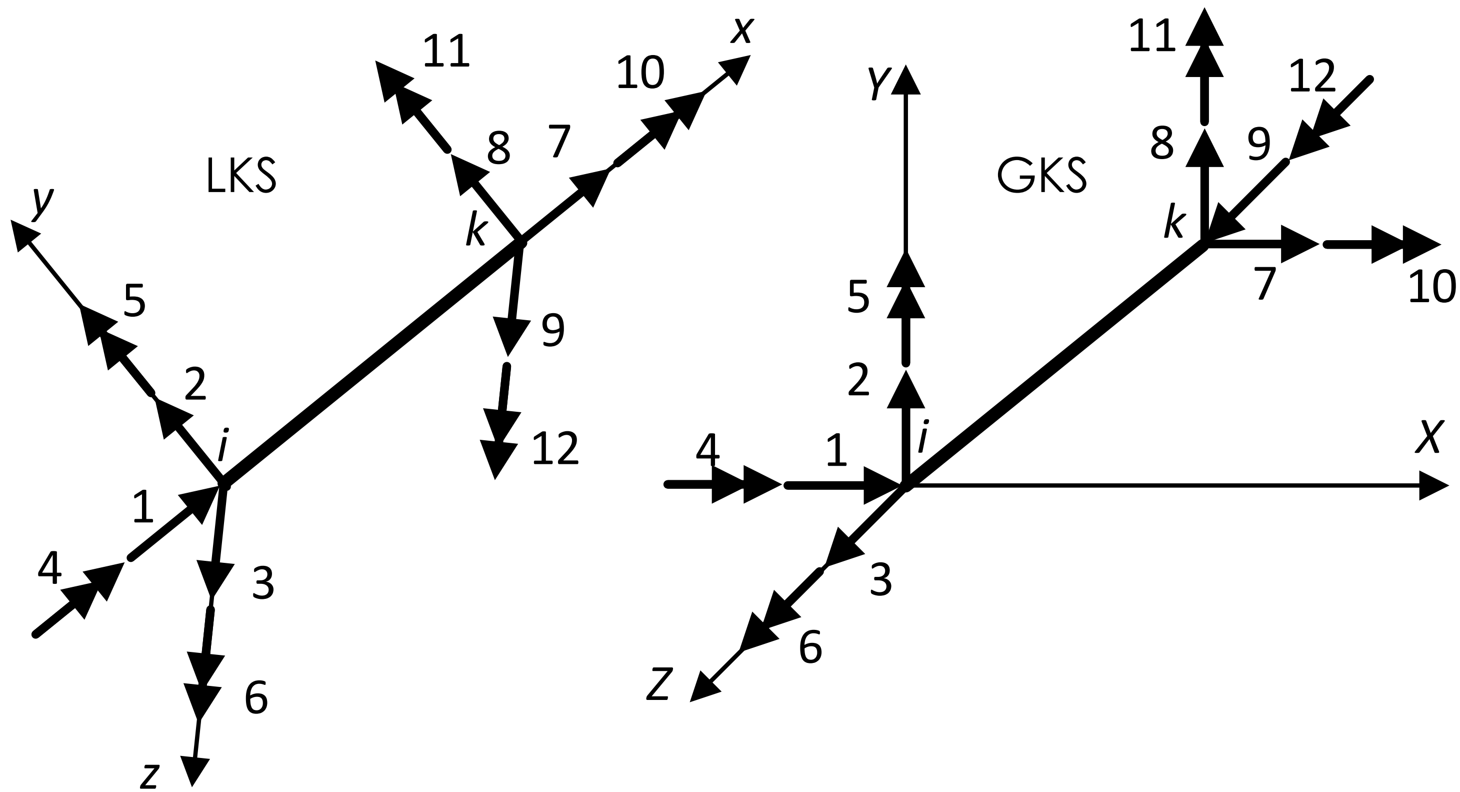
- **Ravanski KE**



$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\bar{\alpha} & \sin\bar{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\bar{\alpha} & \cos\bar{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

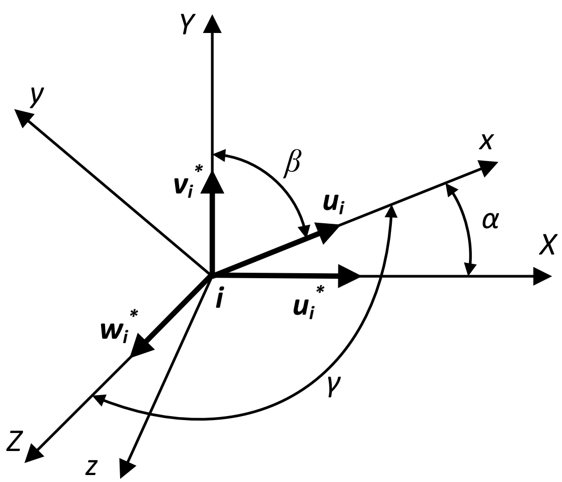
1D KE. Transformacija vektora i matrica

- **Prostorni sistem grednih KE**



1D KE. Transformacija vektora i matrica

- **Prostorni sistem KE**



$$u_i = u_i^* \cos\alpha + v_i^* \cos\beta + w_i^* \cos\gamma$$

$$u_i = u_i^* \cos(x,X) + v_i^* \cos(x,Y) + w_i^* \cos(x,Z)$$

$$\begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ w_i \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(x,X) & \cos(x,Y) & \cos(x,Z) \\ \cos(y,X) & \cos(y,Y) & \cos(y,Z) \\ \cos(z,X) & \cos(z,Y) & \cos(z,Z) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i^* \\ v_i^* \\ w_i^* \end{Bmatrix}$$

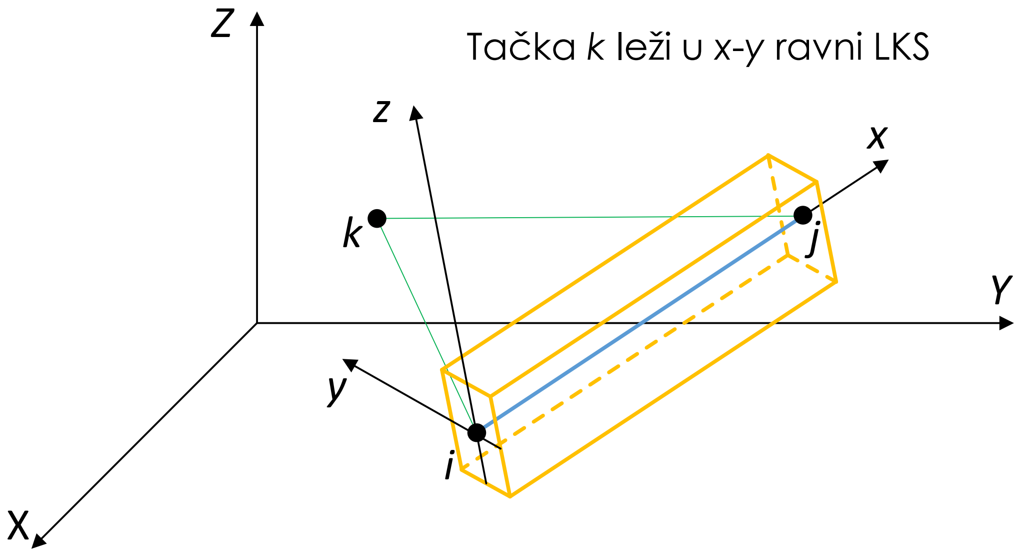
$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \cos(x,X) & \cos(x,Y) & \cos(x,Z) \\ \cos(y,X) & \cos(y,Y) & \cos(y,Z) \\ \cos(z,X) & \cos(z,Y) & \cos(z,Z) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{d}^* \qquad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{T}_2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{t} & 0 \\ 0 & \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad i = 1,2$$

1D KE. Transformacija vektora i matrica

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \mathbf{cos}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}) & \mathbf{cos}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y}) & \mathbf{cos}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}) \\ \cos(y,X) & \cos(y,Y) & \cos(y,Z) \\ \cos(z,X) & \cos(z,Y) & \cos(z,Z) \end{bmatrix}$$

- **Prostorni sistem KE**



Formira se vektor $\mathbf{V}_x$ u pravcu lokalne x ose preko koordinata čvorova *i* i *j*

$$\mathbf{V}_x = \begin{Bmatrix} X_j - X_i \\ Y_j - Y_i \\ Z_j - Z_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{ji} \\ Y_{ji} \\ Z_{ji} \end{Bmatrix}$$

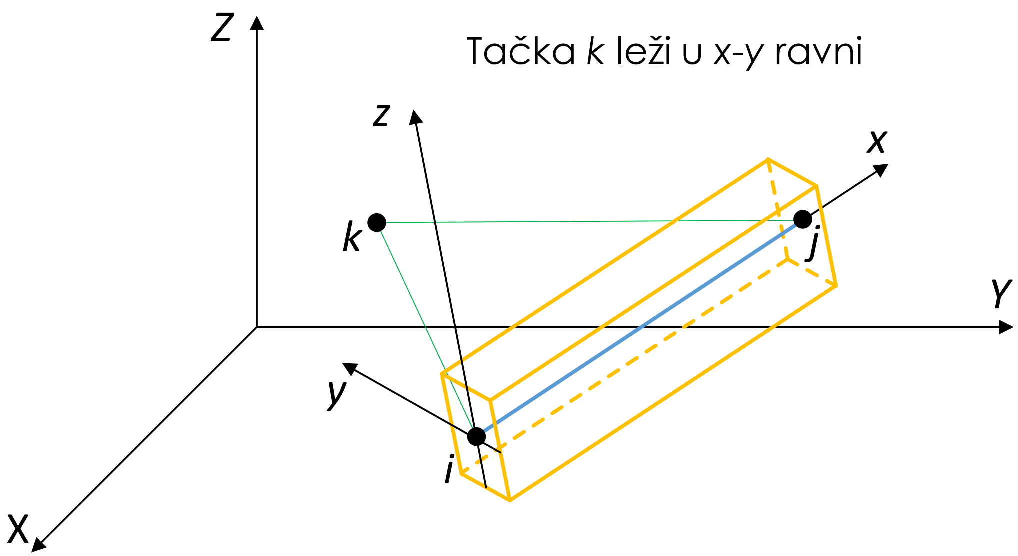
Vektor $\mathbf{v}_x$ kosinusa pravaca vektora $\mathbf{V}_x$ određuje se na sledeći način:

$$\mathbf{v}_x = \begin{Bmatrix} \mathbf{cos}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{X}) \\ \mathbf{cos}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Y}) \\ \mathbf{cos}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Z}) \end{Bmatrix} = \frac{1}{L_{ij}} \begin{Bmatrix} X_{ji} \\ Y_{ji} \\ Z_{ji} \end{Bmatrix} \qquad L_{ij} = \sqrt{X_{ji}^2 + Y_{ji}^2 + Z_{ji}^2}$$

1D KE. Transformacija vektora i matrica

- **Prostorni sistem KE**

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \cos(x,X) & \cos(x,Y) & \cos(x,Z) \\ \cos(y,X) & \cos(y,Y) & \cos(y,Z) \\ \boldsymbol{\cos(z,X)} & \boldsymbol{\cos(z,Y)} & \boldsymbol{\cos(z,Z)} \end{bmatrix}$$



Vektor $\mathbf{V}_z$ u pravcu lokalne ose z koja je upravna na ravan x-y određuje se na sledeći način:

$$\mathbf{V}_z = \mathbf{V}_x \,\mathrm{x}\, \mathbf{V}_{ik} = \begin{Bmatrix} -Y_{ki}Z_{ji} + Y_{ji}Z_{ki} \\ X_{ki}Z_{ji} - X_{ji}Z_{ki} \\ -X_{ki}Y_{ji} + X_{ji}Y_{ki} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{V}_{ik} = \begin{Bmatrix} X_k - X_i \\ Y_k - Y_i \\ Z_k - Z_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} X_{ki} \\ Y_{ki} \\ Z_{ki} \end{Bmatrix}$$

Vektor $\mathbf{v}_z$ kosinusa pravaca vektora $\mathbf{V}_z$ određuje se na sledeći način:

$$\mathbf{v}_z = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\cos(z,X)} \\ \boldsymbol{\cos(z,Y)} \\ \boldsymbol{\cos(z,Z)} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2P} \begin{Bmatrix} -Y_{ki}Z_{ji} + Y_{ji}Z_{ki} \\ X_{ki}Z_{ji} - X_{ji}Z_{ki} \\ -X_{ki}Y_{ji} + X_{ji}Y_{ki} \end{Bmatrix}$$

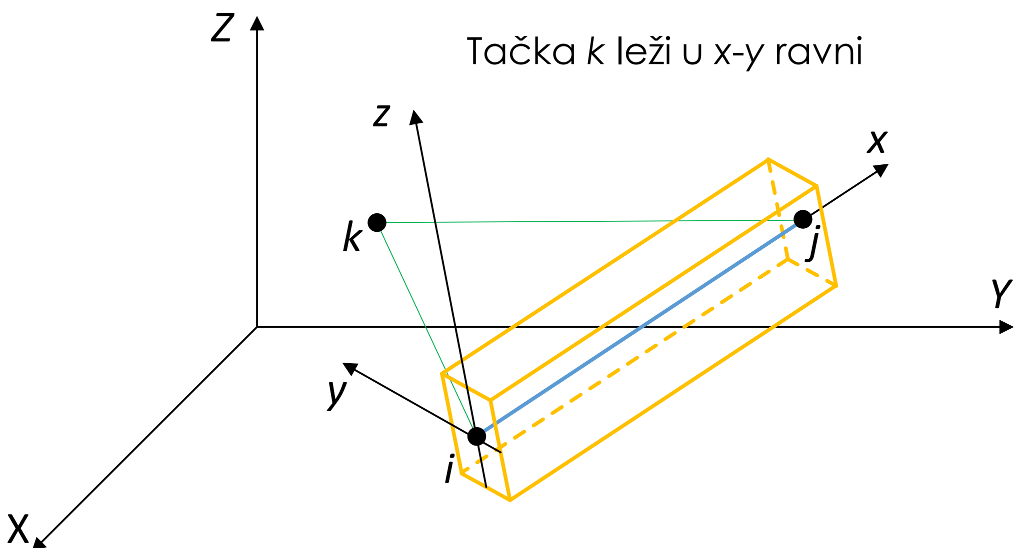
2*P* je intenzitet vektorskog proizvoda i *P* je površina trougla i,j,k

$$P = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}$$

1D KE. Transformacija vektora i matrica

$$\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \cos(x,X) & \cos(x,Y) & \cos(x,Z) \\ \mathbf{cos}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}) & \mathbf{cos}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y}) & \mathbf{cos}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Z}) \\ \cos(z,X) & \cos(z,Y) & \cos(z,Z) \end{bmatrix}$$

- **Prostorni sistem KE**



Vektor $\mathbf{v}_y$ kosinusa pravaca između lokalne ose *y* i globalnih osa *X*, *Y* i *Z* određuje se kao vektorski proizvod vektora $\mathbf{v}_z$ i $\mathbf{v}_x$ (vektori jediničnog intenziteta koji su međusobno upravni) na sledeći način:

$$\mathbf{v}_y = \begin{Bmatrix} \mathbf{cos}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{X}) \\ \mathbf{cos}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Y}) \\ \mathbf{cos}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{Z}) \end{Bmatrix} = \mathbf{v}_z \text{ x } \mathbf{v}_x = \begin{Bmatrix} \cos(x,Z)\cos(z,Y) - \cos(x,Y)\cos(z,Z) \\ -\cos(x,Z)\cos(z,X) + \cos(x,X)\cos(z,Z) \\ \cos(x,Y)\cos(z,X) - \cos(x,X)\cos(z,Y) \end{Bmatrix}$$

Direktno formiranje jednačina sistema konačnih elemenata

- Potencijalna energija KE u globalnom koordinatnom sistemu glasi

$$\Pi_e^* = \frac{1}{2}\mathbf{d}_e^{*T}\mathbf{k}_e^*\mathbf{d}_e^* - \mathbf{d}_e^{*T}\mathbf{Q}_e^*$$

- Ukupna potencijalna energija sistema KE dobija se sabiranjem potencijalnih energija svih KE

$$\Pi = \sum_{e=1}^{M}\Pi_e^* = \sum_{e=1}^{M}\left(\frac{1}{2}\mathbf{d}_e^{*T}\mathbf{k}_e^*\mathbf{d}_e^* - \mathbf{d}_e^{*T}\mathbf{Q}_e^*\right) = \frac{1}{2}\mathbf{d}_{Nx1}^{*T}\mathbf{K}_{NxN}^*\mathbf{d}_{Nx1}^* - \mathbf{d}_{Nx1}^{*T}\mathbf{Q}_{Nx1}^*$$

  - gde su globalna matrica krutosti sistema, globalni vektor generalisanog ekvivalentnog opterećenja u čvorovima sistema (uvodi u analizu spoljašnja dejstva po KE) i globalni vektor spoljašnjih koncentrisanih generalisanih sila u čvorovima sistema (uvodi u analizu generalisane koncentrisane spoljašnje sile u čvorovima sistema KE) dati izrazima

$$\mathbf{K}_{NxN}^* = \sum_{e=1}^{M}\mathbf{k}_e^* \qquad \mathbf{Q}_{Nx1}^* = \sum_{e=1}^{M}\mathbf{Q}_e^* \qquad \mathbf{P}_{Nx1}^* = \sum_{i=1}^{N}P_i^*$$

gde je M ukupan broj KE i N broj stepeni slobode čvorova sistema (mreže) KE

Direktno formiranje jednačina sistema konačnih elemenata

- Primenom principa o minimumu ukupne potencijalne energije dobijaju se **uslovi ravnoteže u čvorovima sistema KE** (indeksi su izostavljeni)

$$\delta \Pi = \mathbf{K}^* \mathbf{d}^* - \mathbf{Q}^* - \mathbf{P}^* = \mathbf{0}$$

$$\mathbf{S}^* = \mathbf{Q}^* + \mathbf{P}^*$$

$$\mathbf{K}^* \mathbf{d}^* = \mathbf{Q}^* + \mathbf{P}^*$$

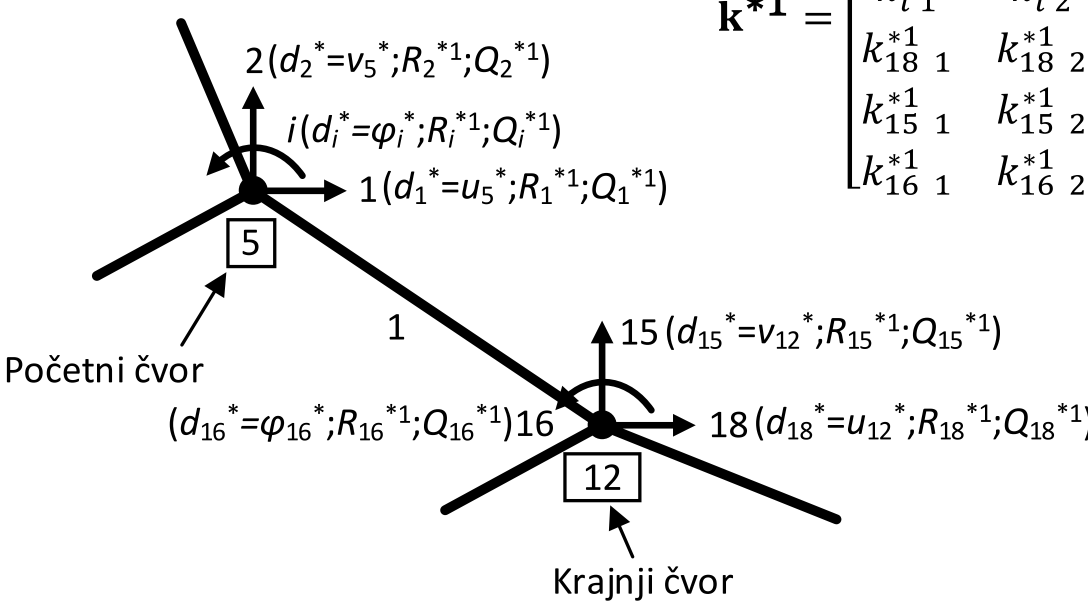
$$\mathbf{K}^* \mathbf{d}^* = \mathbf{S}^*$$

- **Direktan postupak ili direktan metod ili metoda direktne superpozicije formiranja jednačina sistema KE**
  - Matrica krutosti $\mathbf{K}^*$sistema KE u GKS se formira sabiranjem pojedinih elemenata matrica krutosti $\mathbf{k}^*$ u GKS onih KE koji su povezani u istom čvoru i koji pripadaju istom globalnom stepenu slobode čvora. Postupak se obavlja tako što se stepeni slobode pojedinih KE u GKS obeleže se istim brojevima kao i odgovarajući stepeni slobode čvorova sistema KE u GKS, a u kojima su KE spojeni
  - Analognim postupkom formira se i vektor $\mathbf{S}^*$

Direktno formiranje jednačina sistema konačnih elemenata

- Obeležavanje brojevima globalnih stepeni matrice $\mathbf{k}^*$ i vektora $\mathbf{Q}^*$

$$\mathbf{k}^{*1} = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} \mathbf{1} & \mathbf{2} & \boldsymbol{i} & \mathbf{18} & \mathbf{15} & \mathbf{16} \end{array} \\ \begin{bmatrix} k^{*1}_{1\,1} & k^{*1}_{1\,2} & k^{*1}_{1\,i} & k^{*1}_{1\,18} & k^{*1}_{1\,15} & k^{*1}_{1\,16} \\ k^{*1}_{2\,1} & k^{*1}_{2\,2} & k^{*1}_{2\,i} & k^{*1}_{2\,18} & k^{*1}_{2\,15} & k^{*1}_{2\,16} \\ k^{*1}_{i\,1} & k^{*1}_{i\,2} & k^{*1}_{i\,i} & k^{*1}_{i\,18} & k^{*1}_{i\,15} & k^{*1}_{i\,16} \\ k^{*1}_{18\,1} & k^{*1}_{18\,2} & k^{*1}_{18\,i} & k^{*1}_{18\,18} & k^{*1}_{18\,15} & k^{*1}_{18\,16} \\ k^{*1}_{15\,1} & k^{*1}_{15\,2} & k^{*1}_{15\,i} & k^{*1}_{15\,18} & k^{*1}_{15\,15} & k^{*1}_{15\,16} \\ k^{*1}_{16\,1} & k^{*1}_{16\,2} & k^{*1}_{16\,i} & k^{*1}_{16\,18} & k^{*1}_{16\,15} & k^{*1}_{16\,16} \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \boldsymbol{i} \\ \mathbf{18} \\ \mathbf{15} \\ \mathbf{16} \end{array}$$



$$\mathbf{Q}^{*1} = \begin{Bmatrix} Q^{*1}_{1} \\ Q^{*1}_{2} \\ Q^{*1}_{i} \\ Q^{*1}_{18} \\ Q^{*1}_{15} \\ Q^{*1}_{16} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} \mathbf{1} \\ \mathbf{2} \\ \boldsymbol{i} \\ \mathbf{18} \\ \mathbf{15} \\ \mathbf{16} \end{array}$$

Direktno formiranje jednačina sistema konačnih elemenata

- Formira se matrica $\mathbf{K}^*$ koja ima red jednak broju stepeni slobode čvorova mreže KE popunjena nulama
- Formira se vektor $\mathbf{S}^*$ koja ima broj vrsta jednak broju stepeni slobode čvorova mreže KE popunjen nulama
- Po šemi prikazanoj ispod popunjava se matrica $\mathbf{K}^*$ i vektor $\mathbf{S}^*$

Svi elementi su u GKS ali nisu obeleženi sa *

$$\mathbf{K}=\begin{array}{cc}
\begin{array}{cccccccc} 1 & 2 & & & & \overset{d_j}{j} & & N \end{array} & \\
\begin{bmatrix}
 & & & & & \vdots & & \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & K_{ij}=\sum_{e=1}^{M} k_{ij}^{e} & \cdot & \cdot \\
 & & & & & \vdots & &
\end{bmatrix}_{NxN} & \begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ i \quad R_i \\ N \end{array}
\end{array}
\qquad
\mathbf{S}=\begin{bmatrix} S_1 \\ S_2 \\ \vdots \\ S_i = P_i + \sum_{e=1}^{M} Q_i^e \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ S_N \end{bmatrix}_{Nx1}
\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \\ i \\ \\ \\ \\ N \end{array}
\qquad
\mathbf{d}=\begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}_{Nx1}
\begin{array}{l} 1 \\ 2 \\ \\ i \\ \\ \\ \\ N \end{array}$$

Rešavanje jednačina sistema konačnih elemenata

- **Da bi sistem jednačina mogao da se reši neophodno je uvesti esencijalne granične uslove**
- Vektor globalnih stepeni slobode može da se podeli na deo:
  - koji sadrži nepoznata generalisana pomeranja ili **a**ktivna generalisana pomeranja $\mathbf{d}_a^*$ i
  - koji sadrži poznata (zadata) generalisana pomeranja ili **p**asivna generalisana pomeranja $\mathbf{d}_p^*$
- Analogno prethodnoj podeli može da se podeli i matrica krutosti sistema i vektor slobodnih članova
- Nakon ovakve podele, jednačine sistema KE mogu da se prikažu u sledećem obliku

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^* & \mathbf{K}_{ap}^* \\ \mathbf{K}_{pa}^* & \mathbf{K}_{pp}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_a^* \\ \mathbf{d}_p^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_a^* \\ \mathbf{S}_p^* \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{matrix} \mathbf{K}_{aa}^* \mathbf{d}_a^* + \mathbf{K}_{ap}^* \mathbf{d}_p^* = \mathbf{S}_a^* \\ \mathbf{K}_{pa}^* \mathbf{d}_a^* + \mathbf{K}_{pp}^* \mathbf{d}_p^* = \mathbf{S}_p^* \end{matrix}$$

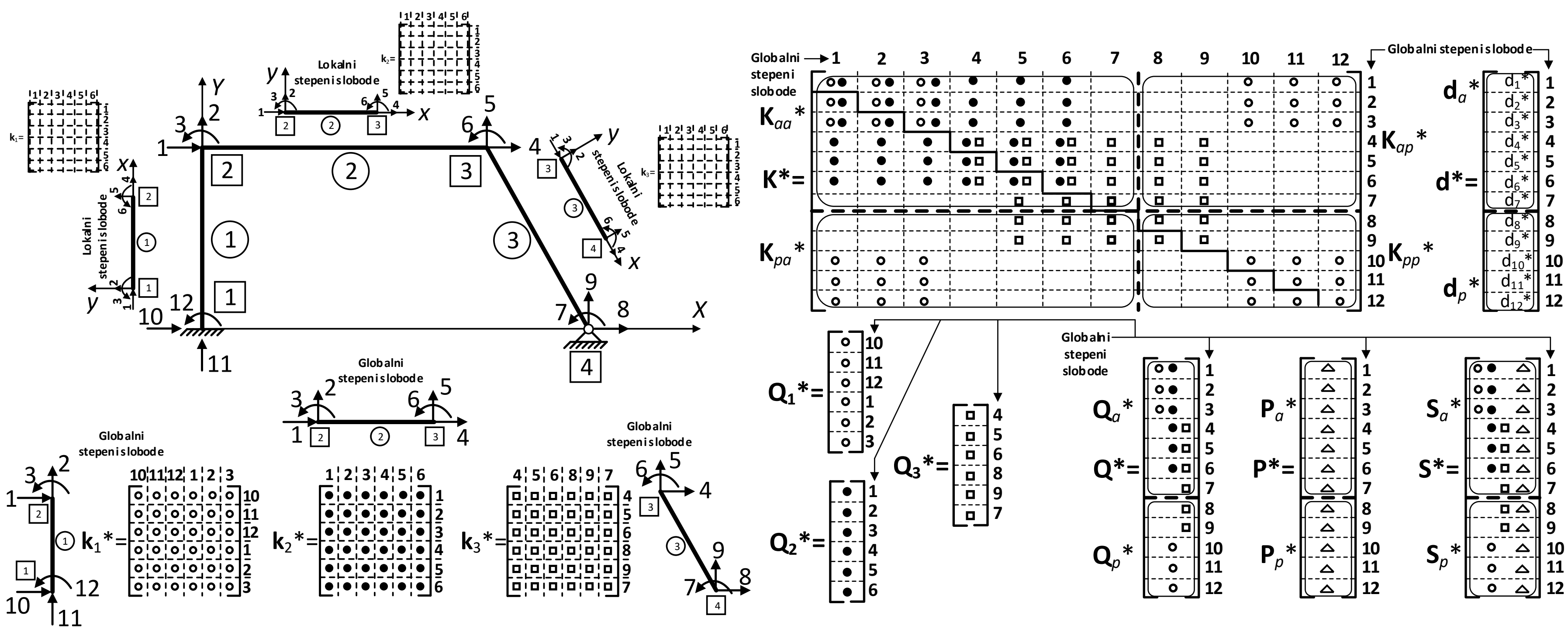
$$\mathbf{d}_a^* = \mathbf{K}_{aa}^{*-1} \mathbf{S}_a^* - \mathbf{K}_{aa}^{*-1} \mathbf{K}_{ap}^* \mathbf{d}_p^* \qquad \mathbf{R}_p^* = \mathbf{S}_p^* - \mathbf{Q}_p^* = \mathbf{K}_{pa}^* \mathbf{d}_a^* + \mathbf{K}_{pp}^* \mathbf{d}_p^* - \mathbf{Q}_p^*$$

Rešavanje jednačina sistema konačnih elemenata

- **Sistem jednačina može da se reši i bez transformacija na deo sa poznatim i nepoznatim generalisanim pomeranjima čvorova mreže KE** ako se elementima na glavnoj dijagonali matrice krutosti sistema, koji odgovaraju sprečenim generalisanim pomeranjima, doda relativno veliki broj, a to je ekvivalentno dodavanju relativno velike krutosti na mestu i u pravcu sprečenog generalisanog pomeranja. Relativno veliki broj može da se dobije kada se najveći broj u matrici krutosti, koji je, obično, neki od elemenata na glavnoj dijagonali, pomnoži npr. brojem 10^6. Na ovaj način u rešenju se javljaju *nule* za generalisana pomeranja čvorova koja odgovaraju homogenim esencijalnim graničnim uslovima. Ovakav pristup olakšava implementaciju u računarski softver
- Jednačine ravnoteže sistema KE ne rešavaju se određivanjem inverzne matrice. **Koriste postupci za rešavanje sistema linearnih algebarskih jednačina koji se dele u dve generalne grupe: direktni i iterativni**. Direktni postupci su efikasniji za sisteme normalne veličine, a za jako velike sisteme jednačina efikasniji su iterativni postupci

Direktno formiranje jednačina sistema konačnih elemenata

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{aa}^* & \mathbf{K}_{ap}^* \\ \mathbf{K}_{pa}^* & \mathbf{K}_{pp}^* \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{d}_a^* \\ \mathbf{d}_p^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{S}_a^* \\ \mathbf{S}_p^* \end{Bmatrix}$$



Određivanje kinematičkih i statičkih veličina u polju konačnog elementa

- Nakon određivanja vektora generalisanih pomeranja u čvorovima sistema KE mogu da se odrede generalisana pomeranja $\mathbf{d}^*$ u čvorovima pojedinih KE, vodeći računa o uslovima kompatibilnosti pomeranja, u globalnom koordinatnom sistemu. Nakon toga, neophodno je odrediti vektore generalisanih pomeranja $\mathbf{d}$, u čvorovima pojedinih KE, u lokalnom koordinatnom sistemu primenom izraza

$$\mathbf{d} = \mathbf{T}\mathbf{d}^*$$

- Raspodela generalisanih pomeranja u polju KE u funkciji generalisanih pomeranja u čvorovima KE određuje se na osnovu izraza

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{d}$$

- Raspodela deformacija i napona (sila u presecima) u polju KE određuje se primenom izraza

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{d} \qquad \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Osobine matrice krutosti konačnog elementa

- **Kvadratna** reda n
  - gde je n broj stepeni slobode čvorova KE, odnosno broj generalisanih pomeranja u čvorovima KE
- **Simetrična** u odnosu na glavnu dijagonalu $k_{ij} = k_{ji}$
  - Simetrija je posledica Betijeve teoreme o uzajamnosti (teorema o uzajamnosti radova)
- **Singularna**
  - Ako se KE pomera kao kruto telo tada su deformacije jednake nuli, generalisana pomeranja čvorova različita su od nule i generalisane sile u čvorovima jednake su nuli, tj. tada važi: $\mathbf{kd} = \mathbf{0}$
  - Prethodni, homogen, sistem jednačina može da ima rešenje različito od nule ($\mathbf{d} \neq \mathbf{0}$) samo ako je determinanta matrice $\mathbf{k}$ jednaka nuli, tj. ako je matrica $\mathbf{k}$ singularna, odnosno ako je rang matrice krutosti manji od njenog reda. Rang matrice krutosti manji je od njenog reda za broj stepeni slobode pomeranja KE kao krutog tela. Generalisane sile u čvorovima KE nisu međusobno nezavisne jer moraju da zadovolje uslove ravnoteže. Zaključuje se da postoji linearna zavisnost između jednog broja jednačina u sistemu $\mathbf{R} = \mathbf{kd}$

Osobine matrice krutosti konačnog elementa

- **Pozitivno semidefinitna**
  - Svojstvene vrednosti matrice krutosti mogu da budu veće od nule ili jednake nuli
  - Broj svojstvenih vednosti jednakih nuli odgovara broju stepeni slobode elementa kao krutog tela
  - S obzirom na to da je vektor generalisanih sila proporcionalan vektoru generalisanih pomeranja čvorova važi

$$\left.\begin{array}{l}\mathbf{R} = \mathbf{kd} \\ \mathbf{R} = \lambda\mathbf{d}\end{array}\right\} \Rightarrow \mathbf{kd} = \lambda\mathbf{d}$$

    - gde je λ faktor proporcionalnosti
  - Na osnovu prethodnog izraza sledi

$$(\mathbf{k} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{d} = \mathbf{0}$$ (gde je λ svojstvena vrednost matrice $\mathbf{k}$)

  - Prethodni sistem homogenih jednačina ima netrivijalno rešenje (**d≠0**) ako je determinanta koeficijenata uz nepoznate jednaka nuli, odnosno karakteristična jednačina matrice krutosti glasi

$$\det(\mathbf{k} - \lambda\mathbf{I}) = 0$$

Osobine matrice krutosti konačnog elementa

- **Pozitivno semidefinitna**
  - Ako se prethodni izraz razvije dobija se karakteristični polinom matrice krutosti
  - Koreni karakterističnog polinoma su svojstvene vrednosti λ_i (i = 1, 2, ..., n) ili karakteristične vrednosti matrice krutosti, a njima odgovarajući svojstveni ili karakteristični vektori $\bar{\mathbf{d}}_i$ matrice krutosti zadovoljavaju izraz

$$\mathbf{k}\bar{\mathbf{d}}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{d}}_i$$

  - pri čemu su svojstveni vektori međusobno ortogonalni, tj. važi sledeće

$$\bar{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{k} \bar{\mathbf{d}}_j = \begin{cases} \lambda_i, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

  - Ako se svojstveni vektori normiraju na takav način da važi sledeće

$$\bar{\mathbf{d}}_i^T \bar{\mathbf{d}}_j = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

  - i ako se izraz $\mathbf{k}\bar{\mathbf{d}}_i = \lambda_i \bar{\mathbf{d}}_i$ pomnoži vektorom $\bar{\mathbf{d}}_i^T$, dobija se

$$\bar{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{k} \bar{\mathbf{d}}_{\boldsymbol{i}} = \lambda_i$$

Osobine matrice krutosti konačnog elementa

- **Pozitivno semidefinitna**
  - Poređenjem izraza $\bar{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{k}\bar{\mathbf{d}}_{\boldsymbol{i}} = \lambda_i$ i izraza $U = \frac{1}{2}\mathbf{d}^T\mathbf{k}\mathbf{d}$ za potencijalnu energiju deformacije KE zaključuje se da važi
    $$\lambda_i = \bar{\mathbf{d}}_i^T \mathbf{k}\bar{\mathbf{d}}_{\boldsymbol{i}} = 2U_i$$
  - gde je U_i potencijalna energija deformacije KE koja je uvek pozitivna vrednost
  - Na osnovu prethodnog izraza dolazi se do fizičkog značenja svojstvenih vrednosti matrice krutosti
    - Svojstvena vrednost λ_i jednaka je dvostrukoj vrednosti potencijalne energije deformacije KE pri generalisanim pomeranjima koja odgovaraju komponentama svojstvenog vektora $\bar{\mathbf{d}}_{\boldsymbol{i}}$
    - Ako se KE pomera kao kruto telo, potencijalna energija deformacije jednaka je nuli, odnosno odgovarajuća svojstvena vrednost jednaka je nuli. S obzirom na to da svojstvene vrednosti matrice krutosti mogu da budu veće od nule ili jednake nuli matrica krutosti je pozitivno semidefinitna
    - Svojstveni vektori $\bar{\mathbf{d}}_{\boldsymbol{i}}$ mogu da se odrede samo kao relativna generalisana pomeranja u odnosu na proizvoljno izabranu veličinu, tako da oni opisuju samo kvalitativno oblike ili forme pomeranja KE

Osobine matrice krutosti konačnog elementa

- **Primer. Test svojstvenih vrednosti. Štapni KE**
  - Kod prostog štapa izloženog aksijalnom naprezanju svojstvene vrednosti i njima odgovarajući svojstveni vektori su

$$\lambda_1 = \frac{2EA}{L}, \qquad \bar{\mathbf{d}}_1 = \left\{-\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}^T \qquad \lambda_2 = 0, \qquad \bar{\mathbf{d}}_2 = \left\{\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\right\}^T$$

  - S obzirom na to da je jedna svojstvena vrednost (λ_2) jednaka nuli štapni KE ima jedan stepen slobode kao kruto telo, a to je pomeranje KE kao celine u pravcu ose KE
  - Rang matrice krutosti je jedan zato što je jedna svojstvena vrednost različita od nule
  - S obzirom na to da je jedna svojstvena vrednost jednaka nuli postoji jedna zavisnost između sila u čvorovima KE, a to je uslov ravnoteže sila u pravcu ose KE
  - Potencijalna energija deformacije KE pri pomeranjima $\bar{\mathbf{d}}_1$

$$\bar{\mathbf{d}}_1 = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \rightarrow u(x) = \left(1 - \frac{x}{L}\right) u_1 + \left(\frac{x}{L}\right) u_2 \rightarrow U = \frac{1}{2} \int_L EA \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx = \frac{EA}{L} \qquad \lambda_1 = \frac{2EA}{L} = 2U$$

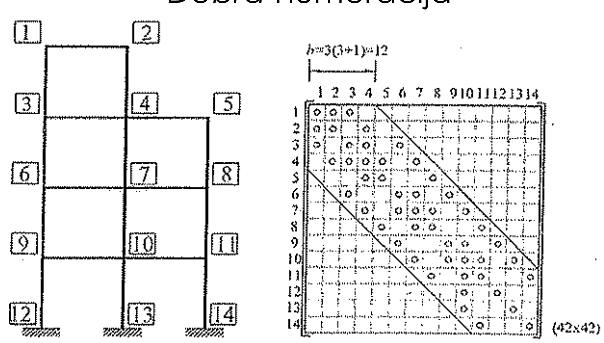
Osobine matrice krutosti sistema konačnih elemenata

- **Simetrična i kvadratna**
- **Singularna** jer su u generalisanim pomeranjima čvorova sistema sadržana i pomeranja sistema kao krute figure
- **Reda n**, gde je n broj stepeni slobode čvorova sistema
- **Ima trakastu strukturu** jer je u jednom čvoru, uobičajeno, povezano manje KE od ukupnog broja KE u sistemu. Širina polutrake b zavisi od načina numeracije čvorova, odnosno zavisi od razlike između brojeva susednih čvorova i broja stepeni slobode u čvoru. Širina polutrake b iznosi

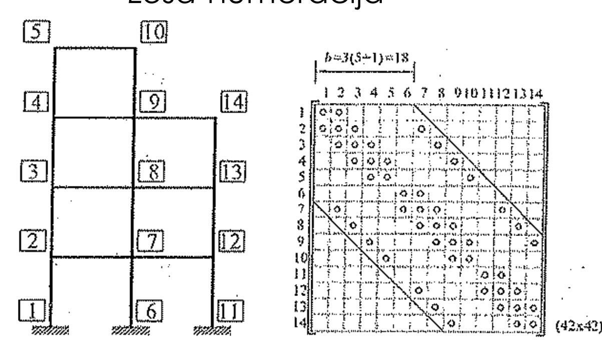
$$b = (m + 1)s$$

gde je m maksimalna razlika između brojeva čvorova na jednom elementu, a s broj stepeni slobode u čvoru

Dobra numeracija



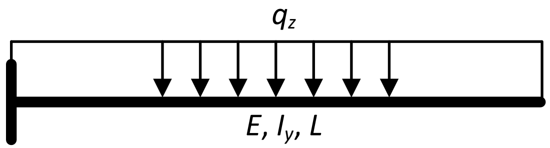
Loša numeracija

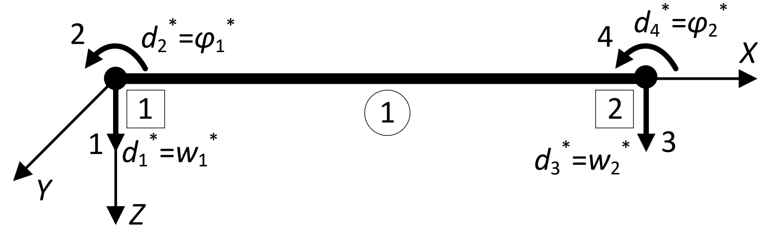


Uža traka sa manjim brojem nula prouzrokuje kraće vreme proračuna i manju potrebu za memorijom

Linearna statička analiza linijskih nosača. Primer

- **Konzola**





$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_1^* = \frac{EI_y}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

$$\mathbf{Q}^* = \begin{Bmatrix} \mathbf{Q}_a^* \\ \mathbf{Q}_p^* \end{Bmatrix} = \mathbf{Q}_1 = \mathbf{Q}_1^* = \int_0^L \mathbf{N}^T q_z dx = q_z \int_0^L \begin{bmatrix} N_1(x) \\ N_2(x) \\ N_3(x) \\ N_4(x) \end{bmatrix} dx = q_z L \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{L}{12} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{L}{12} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}$$

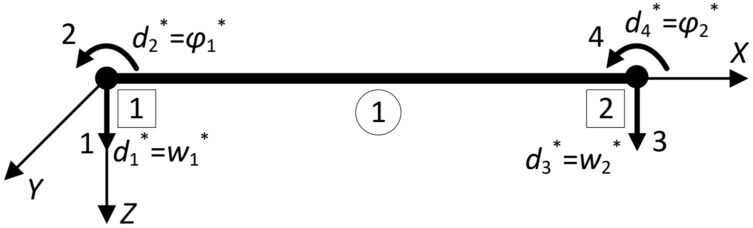
$$d_1^* = w_1^* = 0 \qquad d_2^* = \varphi_1^* = 0$$

$$\mathbf{K}_{aa}^* \mathbf{d}_a^* = \mathbf{S}_a^* = \mathbf{P}_a^* + \mathbf{Q}_a^*$$

$$\frac{EI_y}{L^3}\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 3 & 4 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 12 & 6L \\ 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{Bmatrix} d_3^* \\ d_4^* \end{Bmatrix} = q_z L \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{L}{12} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array}$$

$$\begin{Bmatrix} d_3^* \\ d_4^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_2^* \\ \varphi_2^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_2 \\ \varphi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{q_z L^4}{8EI_y} \\ -\frac{q_z L^3}{6EI_y} \end{Bmatrix} \begin{array}{c} 3 \\ 4 \end{array}$$

Linearna statička analiza linijskih nosača. Primer



- **Konzola**
  - Raspodela pomeranja u polju KE

$$w(x) = \mathbf{Nd} = w_1 N_1(x) + \varphi_1 N_2(x) + w_2 N_3(x) + \varphi_2 N_4(x)$$

$$w(x) = \frac{q_z L^4}{8EI_y}\left(\frac{3x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right) - \frac{q_z L^3}{6EI_y}\left(\frac{x^2}{L} - \frac{x^3}{L^2}\right) = \frac{q_z L^4}{24EI_y}\left(\frac{5x^2}{L^2} - \frac{2x^3}{L^3}\right)$$

$$w\left(\frac{L}{2}\right) = 0{,}33333\left(\frac{q_z L^4}{8EI_y}\right) \qquad w(L) = 1{,}00000\left(\frac{q_z L^4}{8EI_y}\right)$$

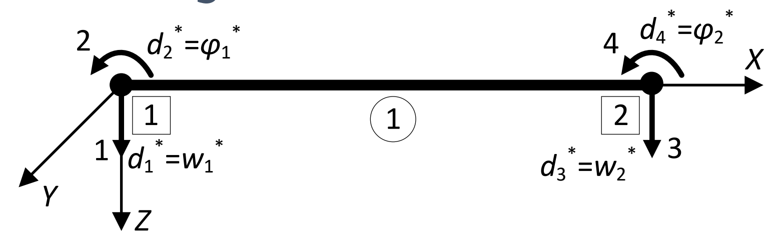
Tačno rešenje $w(x) = \frac{q_z L^4}{24EI_y}\left(6\frac{x^2}{L^2} - 4\frac{x^3}{L^3} + \frac{x^4}{L^4}\right)$

Komentar
Generalisana pomeranja u čvorovima su jednaka tačnom rešenju

  - Raspodela momenata savijanja u polju KE

$$\left.\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{D}\boldsymbol{\varepsilon}\\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \mathbf{Bd}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{DBd} = \mathbf{Sd}$$

Linearna statička analiza linijskih nosača. Primer



- **Konzola**
  - Raspodela momenata savijanja u polju KE

$$\mathbf{D}=\left[EI_y\right] \qquad \mathbf{B}=\mathbf{D}_k\mathbf{N}=\left[-\frac{d^2}{dx^2}\right]\left[N_1 \quad N_2 \quad N_3 \quad N_4\right]=\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2} \quad -\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2}\right]$$

$$\mathbf{S}=\mathbf{DB}=EI_y\left[\frac{6}{L^2}-\frac{12x}{L^3} \quad -\frac{4}{L}+\frac{6x}{L^2} \quad -\frac{6}{L^2}+\frac{12x}{L^3} \quad -\frac{2}{L}+\frac{6x}{L^2}\right]$$

$$\mathbf{d}=\mathbf{d}^* \Rightarrow \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ d_4 \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} d_1^* \\ d_2^* \\ d_3^* \\ d_4^* \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dfrac{q_zL^4}{8EI_y} \\ -\dfrac{q_zL^3}{6EI_y} \end{Bmatrix}\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

$$M_y(x)=\mathbf{Sd}=\frac{q_zL^2}{12}\left(-5+\frac{6x}{L}\right)$$

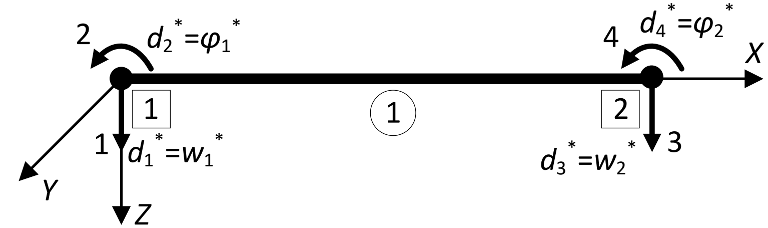
$$M_y(0)=-0{,}83333\frac{q_zL^2}{2}$$

$$M_y\left(\frac{L}{2}\right)=-0{,}33333\frac{q_zL^2}{2}$$

$$M_y(L)=0{,}16667\frac{q_zL^2}{2}$$

Tačno rešenje $M_y(x)=-EI_y\dfrac{d^2w}{dx^2}=\dfrac{q_zL^2}{12}\left(-6+\dfrac{12}{L}x-\dfrac{6}{L^2}x^2\right)$

Linearna statička analiza linijskih nosača. Primer

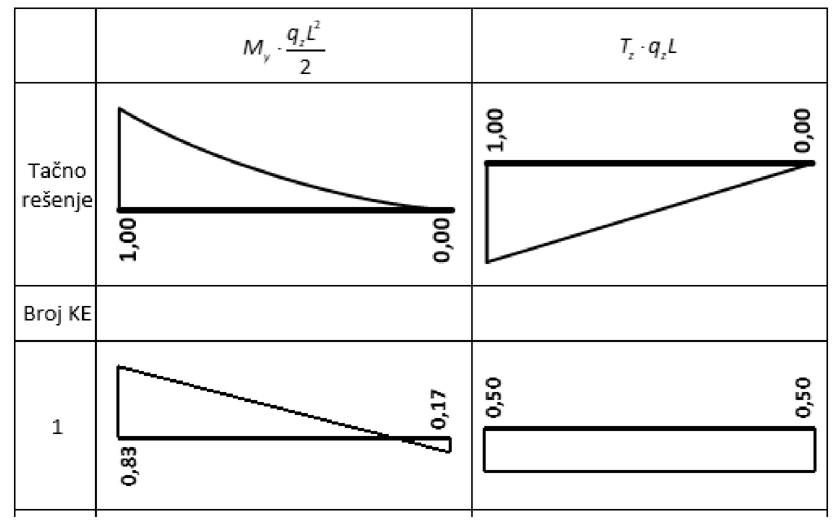


- **Konzola**
  - Raspodela transverzalnih sila u polju KE

$$T_z = EI_y \frac{6\left(-2w_1 + 2w_2 + L(\varphi_{1y} + \varphi_{2y})\right)}{L^3} = \frac{q_z L}{2}$$

Tačno rešenje

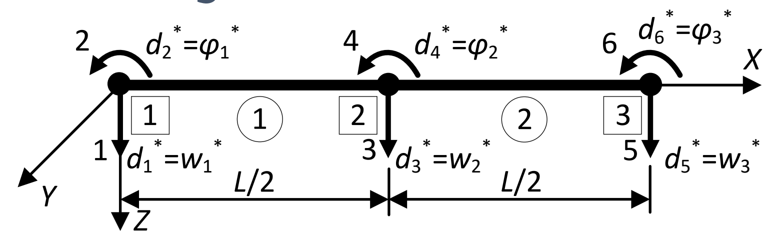
$$T_z(x) = -EI_y \frac{d^3 w}{dx^3} = q_z (L - x)$$



  - Komentar
    - Generalisane sile u čvorovima KE jednake su tačnom rešenju

$$\mathbf{R} = \mathbf{k}\mathbf{d} - \mathbf{Q} = \frac{EI_y}{L^3}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 12 & -6L & -12 & -6L \\ -6L & 4L^2 & 6L & 2L^2 \\ -12 & 6L & 12 & 6L \\ -6L & 2L^2 & 6L & 4L^2 \end{bmatrix} \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{q_z L^4}{8EI_y} \\ -\frac{q_z L^3}{6EI_y} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} - q_z L \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{L}{12} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{L}{12} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix} = \begin{Bmatrix} -q_z L \\ +\frac{q_z L^2}{2} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}$$

Linearna statička analiza linijskih nosača. Primer



- **Konzola**
  - **Približavanje tačnom rešenju može da se postigne sa povećanjem broja KE**

$$\mathbf{k}_1=\mathbf{k}_1^*=\frac{EI_y}{\left(\frac{L}{2}\right)^3}\begin{array}{cc}\begin{array}{cccc}1 & 2 & 3 & 4\end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccc}12 & -6(L/2) & -12 & -6(L/2)\\ -6(L/2) & 4(L/2)^2 & 6(L/2) & 2(L/2)^2\\ -12 & 6(L/2) & 12 & 6(L/2)\\ -6(L/2) & 2(L/2)^2 & 6(L/2) & 4(L/2)^2\end{array}\right] & \begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\end{array}$$

$$\mathbf{k}_2=\mathbf{k}_2^*=\frac{EI_y}{\left(\frac{L}{2}\right)^3}\begin{array}{cc}\begin{array}{cccc}3 & 4 & 5 & 6\end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccc}12 & -6(L/2) & -12 & -6(L/2)\\ -6(L/2) & 4(L/2)^2 & 6(L/2) & 2(L/2)^2\\ -12 & 6(L/2) & 12 & 6(L/2)\\ -6(L/2) & 2(L/2)^2 & 6(L/2) & 4(L/2)^2\end{array}\right] & \begin{array}{c}3\\4\\5\\6\end{array}\end{array}$$

$$\mathbf{Q}_1=\mathbf{Q}_1^*=q_zL\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{4}\\ -\frac{L}{48}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{L}{48}\end{array}\right\}\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}\qquad \mathbf{Q}_2=\mathbf{Q}_2^*=q_zL\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{4}\\ -\frac{L}{48}\\ \frac{1}{4}\\ \frac{L}{48}\end{array}\right\}\begin{array}{c}3\\4\\5\\6\end{array}$$

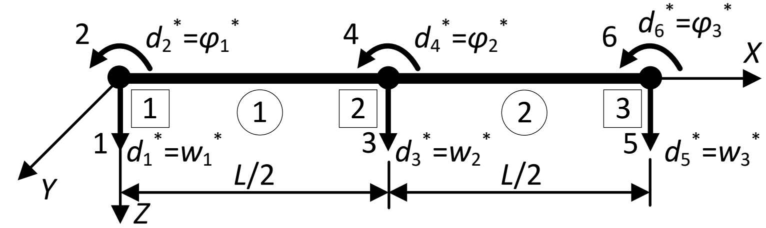
$$\frac{EI_y}{L^3}\begin{array}{cc}\begin{array}{cccc}3 & 4 & 5 & 6\end{array} & \\ \left[\begin{array}{cccc}192 & 0 & -96 & -24L\\ 0 & 16L^2 & 24L & 4L^2\\ -96 & 24L & 96 & 24L\\ -24L & 4L^2 & 24L & 8L^2\end{array}\right] & \begin{array}{c}3\\4\\5\\6\end{array}\end{array}\left\{\begin{array}{c}d_3^*\\ d_4^*\\ d_5^*\\ d_6^*\end{array}\right\}=q_zL\left\{\begin{array}{c}\frac{1}{2}\\ 0\\ \frac{1}{4}\\ \frac{L}{48}\end{array}\right\}\begin{array}{c}3\\4\\5\\6\end{array}$$

$$\left\{\begin{array}{c}d_3^*\\ d_4^*\\ d_5^*\\ d_6^*\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}w_2^*\\ \varphi_2^*\\ w_3^*\\ \varphi_3^*\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}w_2\\ \varphi_2\\ w_3\\ \varphi_3\end{array}\right\}=\frac{q_zL^3}{EI_y}\left\{\begin{array}{c}\frac{17L}{384}\\ -\frac{7}{48}\\ \frac{L}{8}\\ -\frac{1}{6}\end{array}\right\}\begin{array}{c}3\\4\\5\\6\end{array}$$

$$\mathbf{d}^{1*}=\mathbf{d}^1=\left\{\begin{array}{c}d_1^*\\ d_2^*\\ d_3^*\\ d_4^*\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}w_1\\ \varphi_1\\ w_2\\ \varphi_2\end{array}\right\}=\frac{q_zL^3}{EI_y}\left\{\begin{array}{c}0\\ 0\\ \frac{17L}{384}\\ -\frac{7}{48}\end{array}\right\}\begin{array}{c}1\\2\\3\\4\end{array}$$

$$\mathbf{d}^{2*}=\mathbf{d}^2=\left\{\begin{array}{c}d_3^*\\ d_4^*\\ d_5^*\\ d_6^*\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{c}w_2\\ \varphi_2\\ w_3\\ \varphi_3\end{array}\right\}=\frac{q_zL^3}{EI_y}\left\{\begin{array}{c}\frac{17L}{384}\\ -\frac{7}{48}\\ \frac{L}{8}\\ -\frac{1}{6}\end{array}\right\}\begin{array}{c}3\\4\\5\\6\end{array}$$

Linearna statička analiza linijskih nosača. Primer



- **Konzola**

$$w^1(x) = \mathbf{Nd}^1 = w_1 N_1(x) + \varphi_1 N_2(x) + w_2 N_3(x) + \varphi_2 N_4(x)$$
$$w^2(x) = \mathbf{Nd}^2 = w_2 N_1(x) + \varphi_2 N_2(x) + w_3 N_3(x) + \varphi_3 N_4(x)$$

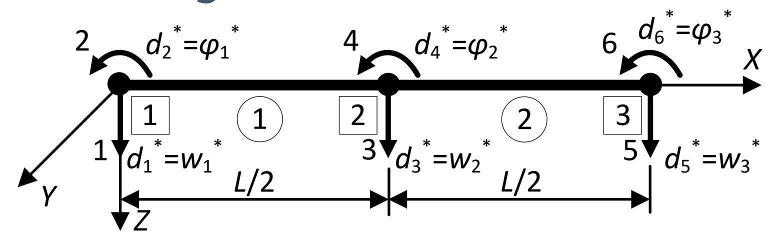
$$w^1(x) = \frac{q_z L^4}{24EI_y}\left[\frac{23}{4}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^3\right] \qquad w^2(x) = \frac{q_z L^4}{24EI_y}\left[\frac{17}{16} + \frac{7}{2}\frac{x}{L} + \frac{5}{4}\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]$$

$$w^1\left(\frac{L}{2}\right) = 0{,}35417\left(\frac{q_z L^4}{8EI_y}\right) \qquad w^2(0) = 0{,}35417\left(\frac{q_z L^4}{8EI_y}\right)$$

$$w^2\left(\frac{L}{2}\right) = 1{,}00000\left(\frac{q_z L^4}{8EI_y}\right)$$

Komentar:
Generalisana pomeranja u čvorovima jednaka su tačnom rešenju

Linearna statička analiza linijskih nosača. Primer



- **Konzola**

$$\mathbf{D} = [EI_y] \qquad \mathbf{B} = \mathbf{D}_k\mathbf{N} = \left[\frac{24}{L^2} - \frac{96x}{L^3} \quad -\frac{8}{L} + \frac{24x}{L^2} \quad -\frac{24}{L^2} + \frac{96x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{24x}{L^2}\right]$$

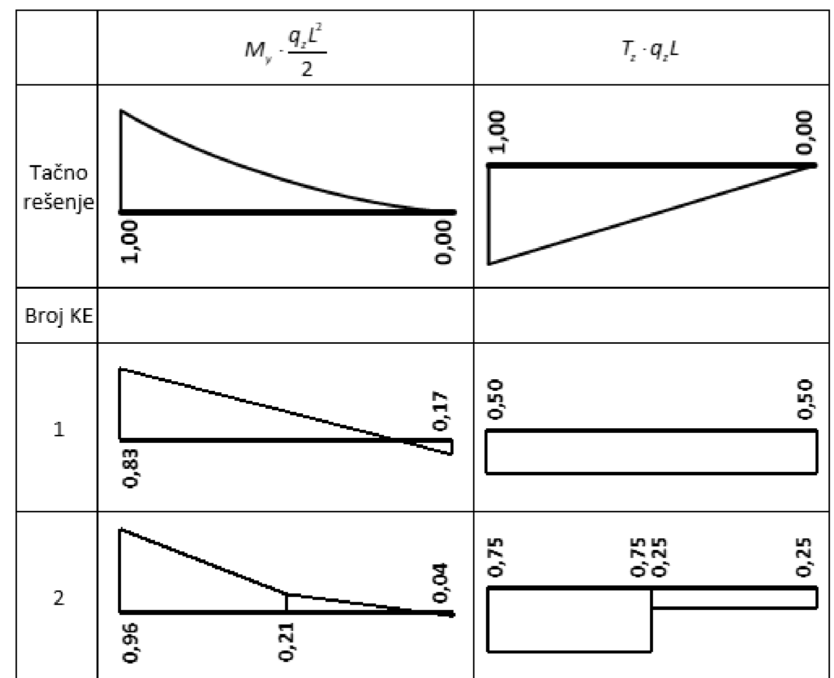
$$\mathbf{S} = \mathbf{DB} = EI_y\left[\frac{24}{L^2} - \frac{96x}{L^3} \quad -\frac{8}{L} + \frac{24x}{L^2} \quad -\frac{24}{L^2} + \frac{96x}{L^3} \quad -\frac{4}{L} + \frac{24x}{L^2}\right]$$

$$M_y^1(x) = \mathbf{Sd^1} = \frac{q_z L^2}{2}\left(-\frac{23}{24} + \frac{3x}{2L}\right)$$

$$M_y^2(x) = \mathbf{Sd^2} = \frac{q_z L^2}{2}\left(-\frac{5}{24} + \frac{x}{2L}\right)$$

$$T_z = EI_y \frac{6\left(-2w_1 + 2w_2 + L\left(\varphi_{1y} + \varphi_{2y}\right)\right)}{L^3}$$

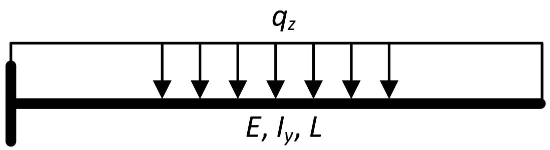
$$T_z^1(x) = \frac{3}{4} q_z L \qquad T_z^2(x) = \frac{1}{4} q_z L$$



Komentar:
Generalisane sile **R**=**kd**-**Q** u čvorovima KE jednake su tačnom rešenju

Linearna statička analiza linijskih nosača. Primer

- **Konzola**



Komentar:
Primeri za prostu gredu i ravanski okvir su dati u udžbeniku Metoda konačnih elemenata, deo I